Esercitazioni Geometria 1

Federico Allegri, corso di Manfredini S. e Collari C.

Anno Accademico 2021-2022

1 Esercitazione 21-10-2021

1.1 Esercizio 1

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Un sottospazio $W \subset V$ si dice proprio se $W \neq V$. Dimostrare che se $\mathbb{K}$ è infinito allora $V \neq \{0\}$ non è unione finita di sottospazi propri.

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione su k che se $W_1, ..., W_k \subset V$ sono sottospazi propri, allora $W_1 \cup ... \cup W_k \neq V$.
Per $k = 1$ abbiamo $W_1 \neq V$ che segue dalla definizione di sottospazio proprio.
Sia ora $k \geq 2$: Se $W_1 \subset (W_2 \cup ... \cup W_k) \implies W_1 \cup ... \cup W_k = W_2 \cup ... \cup W_k \neq V$ per ipotesi induttiva. Se invece $W_1 \not\subseteq (W_2 \cup ... \cup W_k) \implies \exists\ w \in W_1$ tale che $w \notin W_2 \cup ... \cup W_k$, ma W_1 è un sottospazio proprio $\implies \exists v \in V$ tale che $v \notin W_1$. Inoltre $\forall i \in \{2, ..., k\}$ $w \notin W_i \longrightarrow w \neq 0$ (ovviamente anche $v \neq 0$). Consideriamo allora l'insieme $L = \{v + \lambda w \in V \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = v + Span(w)$, ovvero il traslato della retta generata da w per il vettore v. Consideriamo ora la funzione $f : \mathbb{K} \longrightarrow L$ che manda $\lambda \mapsto v + \lambda w$. Tale funzione è surgettiva (scelto un vettore x di L esiste sempre un λ tale che $f(\lambda) = x$) e iniettiva (a λ diversi sono associati vettori diversi): dunque L e $\mathbb{K}$ sono in bigezione e in particolare hanno la stessa cardinalità, che è infinita per ipotesi: L è dunque infinito. Notiamo ora che $L \cap W_1 = \emptyset$, difatti, se esistesse $\lambda \in \mathbb{K}$ tale per cui $v + \lambda w = u_1 \in W_1$, allora si avrebbe che $v = u_1 - \lambda w \in W_1$ che è assurdo perché avevamo scelto $v \notin W_1$. Facciamo invece vedere ora che $\forall i \in \{2, ..., k\}$, L interseca W_k in al più un punto: se esistessero $v+\lambda_1 w,\ v+\lambda_2 w \in W_i$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$ allora $u = v+\lambda_1 w - v - \lambda_2 w = \lambda_1 w - \lambda_2 w = (\lambda_1 - \lambda_2)w \in W_i$, con $(\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0)$, ma così si avrebbe che $w = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} u \in W_i$ il che è assurdo per come abbiamo scelto w all'inizio. Ma quindi l'insieme $L \cap (W_1 \cup ... \cup W_k)$ contiene al più $k - 1$ elementi, dunque, poiché L è infinito , $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tale che $v + \lambda w \notin W_1 \cup ... \cup W_k$, ma dato che $v + \lambda w \in V$ abbiamo trovato un elemento di V fuori dall'unione dei sottospazi propri $\implies V \neq W_1 \cup ... \cup W_k$.

1.2 Esercizio 2

Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_3[t]$ che manda $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto (a+b)t^3 + (2a+b)t^2 - (2b+a)t + (a-b)$. Dimostra che f è lineare, poi trova $Kerf$ e stabilisci se tale f è surgettiva o meno.

Dimostrazione. Per dimostrare che tale applicazione è lineare bisogna mostrare che è sia additiva che omogenea. Cominciamo con l'additività: siano allora $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ due vettori di $\mathbb{R}^2$. Valutiamo $f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix})$

$$f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}) = (a+c+b+d)t^3+(2a+2c+b+d)t^2-(2b+2d+a+c)t+(a+c-b-d)$$

$$= (a+b)t^3+(2a+b)t^2-(2b+a)t+(a-b)+(c+d)t^3+(2c+d)t^2-(2d+c)t+(c-d) = f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})+f(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix})$$

Facciamo ora vedere che l'applicazione è anche omogenea: sia dunque $\mu \in \mathbb{R}$ e $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Vogliamo far vedere che $f(\mu \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \mu f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$.

$$f(\mu \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} \mu a \\ \mu b \end{pmatrix}) = (\mu a + \mu b)t^3 + (2\mu a + \mu b)t^2 - (2\mu b + \mu a)t + (\mu a - \mu b) =$$

$\mu(a+b)t^3+\mu(2a+b)t^2-\mu(2b+a)t+\mu(a-b) = \mu(a+b)t^3+(2a+b)t^2-(2b+a)t+(a-b) = \mu f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$

Quindi abbiamo dimostrato che tale applicazione è lineare, come richiesto.
Cerchiamo ora il Ker di questa applicazione lineare:

$$Kerf = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = 0 \right\}$$

dove 0 è il polinomio nullo ($0 = 0t^3 + 0t^2 + 0t + 0$). Ma allora, poiché l'applicazione prende vettori e li manda in coefficienti, un elemento $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ apparterrà al $Ker \iff$ tutti i coefficienti del polinomio immagine sono nulli, cioè:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in Kerf \iff \begin{cases} a+b &= 0 \\ 2a+b &= 0 \\ -a-2b &= 0 \\ a-b &= 0 \end{cases}$$

Il numero di elementi del Ker è quindi uguale al numero di soluzioni di quel sistema lineare in 2 incognite e 4 equazioni... notiamo però che dalla prima e dall'ultima equazione otteniamo necessariamente che $a = b = 0 \implies Kerf = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \iff f$ è iniettiva.
Studiamo ora la surgettività. Per farlo facciamo un passaggio intermedio: chiediamoci se, ad esempio, il polinomio $t \in Imf$. Questo succede se e solo se $\exists \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tale che $f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = t$. Questo succede se e solo se i coefficienti dei polinomi $Imf(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$ e t sono rispettivamente e ordinatamente uguali, ovvero se il sistema

$$\begin{cases} a+b &= 0 \\ 2a+b &= 0 \\ -a-2b &= 1 \\ a-b &= 0 \end{cases}$$

ammette soluzione. Tuttavia questo sistema non ammette soluzione in quanto, come prima, dalla prima e dalla quarta equazione otteniamo che $a = b = 0$ e dunque $-a-2b \neq 1$. Quindi $t \notin Imf$ e f non è surgettiva. Cerchiamo di capire allora com'è fatta l'immagine di questa applicazione: cerchiamo cioè di capire come devono essere fatti i polinomi di $\mathbb{R}_3[t]$ affinché essi possano appartenere all'immagine di f. Prendiamo allora un elemento di $\mathbb{R}_3[t]$ e scriviamolo come segue: siano $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ e sia $a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 \in \mathbb{R}_3[t]$. Questo polinomio appartiene a $Imf \iff$ il seguente sistema

$$\begin{cases} a+b &= a_3 \\ 2a+b &= a_2 \\ -a-2b &= a_1 \\ a-b &= a_0 \end{cases}$$

ammette soluzione. Dalla prima e dalla quarta equazione si ottiene $2a = a_3 + a_0$ e
$2b = a_3 - a_0$, quindi sostituendo nelle altre due equazioni otteniamo che il sistema è risolubile $\iff a_3 + a_0 + \frac{a_3 - a_0}{2} = a_2$ e $-(a_3 - a_0) - \frac{a_3 + a_0}{2} = a_1$. Quindi, la scelta di a_0 e di a_3 è arbitraria, mentre a_1 e a_2 non sono casuali, anzi, dipendono direttamente dagli altri due. Svolgendo i calcoli, scriviamo allora l'insieme immagine come segue:

$$Imf = \left\{ a_3(t^3 + \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}t) + a_0(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + 1) \;\middle|\; a_3, a_0 \in \mathbb{R} \right\}$$

detti $t^3 + \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}t = q$ e $\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + 1 = p$, si ha che $Imf = Span(p, q)$. Lo stesso ragionamento avremmo potuto farlo anch con la formula iniziale: sapendo che $f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = a(t^3 + 2t^2 - t + 1) + b(t^3 + t^2 - 2t - 1)$ detti $v = t^3 + 2t^2 - t + 1$ e $w = t^3 + t^2 - 2t - 1$ (essi sono linearmente indipendenti in quanto avevamo già trovato in precedenza il nucleo) si ha che $Imf = Span(v, w)$.

Questo ci dimostra che abbiamo trovato due modi diversi per costruire lo stesso sottospazio: in realtà ce ne sono più di due, per la precisione infiniti! Basta infatti scegliere un polinomio p di $\mathbb{R}_3[t]$ non nullo e prenderne un altro non appartenente a $Span(p)$.

1.3 Esercizio 3

Sia $f = val_\alpha : \mathbb{K}[t] \longrightarrow \mathbb{K}$, con $\alpha \in \mathbb{K}$, che associa $p \mapsto p(\alpha)$ l'applicazione "valutazione in α". Si dimostri che tale applicazione è lineare, studiarne poi la surgettività, e l'iniettività.

Dimostrazione. Cominciamo dimostrando che l'applicazione è lineare: mostriamo dunque sia l'additività che l'omogeneità.
Additività: Siano p e q due polinomi di $\mathbb{K}[t]$, allora

$$f(p+q) = val_\alpha(p+q) = (p+q)(\alpha) = p(\alpha) + q(\alpha) = val_\alpha(p) + val_\alpha(q) = f(p) + f(q)$$

Omogeneità: Siano $p \in \mathbb{K}[t]$ e $\mu \in \mathbb{K}$, allora

$$f(\mu p) = val_\alpha(\mu p) = (\mu p)(\alpha) = \mu p(\alpha) = \mu val_\alpha(p) = \mu f(p)$$

Dunque l'applicazione è lineare, come volevasi dimostrare.
Scoperto che è lineare, studiamo tutte le sue proprietà: chi è Imf? Chi è $Kerf$? Cominciamo studiando la sua immagine: si nota subito che val_α è un'applicazione surgettiva, in quanto $\forall w \in \mathbb{K}$ il polinomio costante $p(t) = w \in \mathbb{K}[t]$ valutato in α dà come output w. Quindi $Im(val_\alpha) = \mathbb{K}$.
Vediamo invece come è fatto il suo nucleo: per definizione $Kerf = \{p \in \mathbb{K}[t] \mid p(\alpha) = 0\}$, ma se $p(\alpha) = 0$ allora per il teorema di Ruffini $(t-\alpha)|p(t)$, ovvero:
$Kerf = \{p \in \mathbb{K}[t] \mid (t-\alpha)|p(t)\}$, che per definizione è $(t-\alpha)$, ovvero l'ideale generato da $t-\alpha$. Ovviamente questo ci mostra che val_α non è un'applicazione iniettiva.

1.4 Esercizio 4

Sia $^\top : M(m,n,\mathbb{K}) \longrightarrow M(n,m,\mathbb{K})$ l'applicazione che manda una matrice A di taglia $m \times n$ nella sua trasposta $A^\top$ di taglia $n \times m$, dove si ricorda che se $A = \{a_{ij}\}_{i\in\{1,\dots,m\}, j\in\{1,\dots,n\}}$, allora $A^\top = \{a_{ji}\}_{j\in\{1,\dots,n\}, i\in\{1,\dots,m\}}$. Si dimostri che tale applicazione è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Dimostrazione. Poiché si è già dimostrato a lezione che tale applicazione è lineare, ci resta da dimostrare che è bigettiva. Per farlo mostriamo che la trasposta è un'involuzione, ovvero è un'applicazione che ha la proprietà di essere l'inversa di sé stessa (una volta mostrato questo infatti, avremo esplicitato la funzione inversa di $^\top$, facendo vedere che l'applicazione è bigettiva). Studiamo allora il comportamento di $(A^\top)^\top$, quando $A = \{a_{ij}\}_{i\in\{1,\dots,m\}, j\in\{1,\dots,n\}}$ applicando la definizione di trasposta:

$$(A^\top)^\top = (\{a_{ji}\}_{j\in\{1,\dots,n\}, i\in\{1,\dots,m\}})^\top = \{a_{ij}\}_{i\in\{1,\dots,m\}, j\in\{1,\dots,n\}} = A$$

Visto che abbiamo esplicitato l'inversa di $^\top$, si è dimostrato che tale applicazione lineare è bigettiva, e che dunque è un isomorfismo di spazi vettoriali.
Se dunque $^\top : M(n,\mathbb{K}) \longrightarrow M(n,\mathbb{K})$, essa appartiene a $GL(M(n,\mathbb{K}))$.

Definiamo ora due sottospazi importantissimi che dipendono dal concetto di trasposta: l'insieme $S_n = \mathcal{Z}_{^\top, id_{M(n,\mathbb{K})}} = \{A \in M(n,\mathbb{K}) \mid A^\top = A\} = Ker(^\top - id_{M(n,\mathbb{K})})$ detto sottospazio delle matrici simmetriche (che è l'insieme delle matrici uguali alla loro trasposta) e l'insieme $A_n = \mathcal{Z}_{^\top, -id_{M(n,\mathbb{K})}} = \{A \in M(n,\mathbb{K}) \mid A^\top = -A\} = Ker(^\top + id_{M(n,\mathbb{K})})$ detto sottospazio delle matrici antisimmetriche (ovvero le matrici uguali all'opposta della loro trasposta). (Si ricorda che l'insieme $\mathcal{Z}_{f,g}$, dove f e g sono applicazioni lineari definite sullo stesso spazio vettoriale V, è definito da $\mathcal{Z}_{f,g} = \{v \in V \mid f(v) = g(v)\}$, ed è un sottospazio vettoriale di V). Compare, in queste due definizioni, un insieme particolare, che merita di essere rinominato: sia allora $f : V \longrightarrow V$, sia $\lambda \in \mathbb{K}$, chiamiamo l'insieme $\mathcal{Z}_{f,\lambda id_V} = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} = Ker(f - \lambda id_V)$ autospazio di f relativo a λ e gli assegniamo il simbolo $V_\lambda(f)$.

1.5 Esercizio 5

Dimostra che se $f : V \longrightarrow W$ e $g : W \longrightarrow Z$, allora $g \circ f = 0 \Longleftrightarrow Imf \subset Kerg$.

Dimostrazione. Dimostriamo le due frecce separatamente:

($\Longrightarrow$) sia $w \in Imf$, allora $\exists v \in V$ tale per cui $w = f(v)$. Valutiamo ora $g(w)$: $g(w) = g(f(v)) = (g \circ f)(v) = 0(v) = 0 \implies w \in Kerg$.

($\Longleftarrow$) Sia $v \in V$, allora $(g \circ f)(v) = g(f(v)) = 0$ in quanto per ipotesi $Imf \subset Kerg$ e $f(v) \in Imf$. Poiché questo vale $\forall v \in V$, $g \circ f = 0$.

2 Esercitazione 26-10-2021

2.1 Esercizio 1

Siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e sia $U \subset V$ un sottospazio di V. Sia inoltre $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare.
$i)$ Dare condizioni necessarie e sufficienti affinché esista $h : V/U \longrightarrow W$ lineare tale che il diagramma seguente sia commutativo.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\
V/U \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

$ii)$ Nei casi in cui h esiste, determinare $Kerh$ e Imh.
$iii)$ Mostrare che se $U = Kerf$, allora h dà un isomorfismo tra V/U e Imf.

Dimostrazione. $i)$ Se il diagramma di sopra commuta, allora necessariamente si deve avere che $h \circ \pi = f$. Facciamo uno studio preliminare su Imf e $Kerf$: $Imf = Im(h \circ \pi)$ che per quanto visto a lezione è contenuto in Imh (ovvero $Imf = Im(h \circ \pi) \subset Imh$), mentre $Kerf = Ker(h \circ \pi)$ che, per quanto visto a lezione, contiene $Ker\pi = U$, ovvero $Kerf = Ker(h \circ \pi) \supset Ker\pi = U$ (Ricorda che: data $\pi : V \longrightarrow V/U$ proiezione al quoziente, il nucleo di questa applicazione è sempre U).
Una condizione necessaria affinché il diagramma commuti è dunque che $U \subset Kerf$. Ci chiediamo se questa condizione sia anche sufficiente: poiché dobbiamo dimostrare l'esistenza di tale h, l'unico modo per farlo è mostrare esplicitamente un esempio di questa applicazione... se ci riusciamo, allora abbiamo dimostrato che la condizione è anche sufficiente! Cerchiamo allora, sapendo che $U \subset Kerf$, una h che funzioni.
Sia allora $h : V/U \longrightarrow W$, sia $v \in V$ e sia $[v] \in V/U$ la classe d'equivalenza di v su U. Dove può andare $[v]$ tramite h? Poiché il diagramma commuta ci sono poche alternative: $h([v]) = h(\pi(v)) = (h \circ \pi)(v) = f(v)$. Definiamo allora $h([v]) = f(v)$: affinché funzioni dobbiamo mostrare che tale applicazione è ben definita e lineare.

Buona definizione: sia $v' \in V$ tale che $[v] = [v']$: voglio far vedere che allora $h([v]) = h([v'])$. Notiamo che $[v] = [v']$ significa che $v - v' \in U$, ovvero che $\exists u \in U$ tale che $v' = v + u$. Valutiamo allora $h([v'])$:

$$h([v']) = f(v') = f(v + u) = f(v) + f(u) = f(v) = h([v])$$

dove il passaggio $f(v) + f(u) = f(v)$ è giustificato dal fatto che per l'ipotesi fatta all'inizio $U \subset Kerf$, e quindi $\forall u \in U,\ f(U) = 0$. Abbiamo così dimostrato che cambiando rappresentante della stessa classe di equivalenza, la h assume lo stesso valore, ovvero che essa è ben definita.

Linearità: In questo caso dobbiamo dimostrare sia l'additività che l'omogeneità.
Additività: Siano $v_1, v_2 \in V$ e siano $[v_1], [v_2] \in V/U$ le loro classi d'equivalenza, allora:

$$h([v_1] + [v_2]) = h([v_1 + v_2]) = f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = h([v_1]) + h([v_2])$$

Omogeneità: Siano $\mu \in \mathbb{K}$, $v \in V$ e sia $[v] \in V/U$ la sua classe d'equivalenza, allora:

$$h(\mu[v]) = h([\mu v]) = f(\mu v) = \mu f(v) = \mu h([v])$$

Dunque tale applicazione è ben definita e lineare, e la condizione $U \subset Kerf$ risulta essere anche sufficiente.

Dimostrazione. $ii)$ Poiché abbiamo dimostrato al punto $i)$ che la h esiste in un solo caso, ovvero quello per cui $U \subset Kerf$, e per di più se esiste allora ce n'è una sola, ci limitiamo a studiare $Kerh$ e Imh relativi all'unica applicazione esistente. Cominciamo studiando l'immagine:

$$Imh = h(V/U) = h(\pi(V)) = (h \circ \pi)(V) = f(V) = Imf$$

quindi, l'immagine della h è uguale all'immagine della f: in particolare, se la f è surgettiva, allora anche la h è surgettiva.
Vediamo invece ora come si comporta il nucleo:

$$Kerh = \{[v] \in {}^{V}\!/\!_{U} \mid h([v]) = 0\} = \{\pi(v) \in {}^{V}\!/\!_{U} \mid f(v) = 0\} = \{\pi(v) \in {}^{V}\!/\!_{U} \mid v \in Kerf\} = \pi(Kerf)$$

In particolare h è iniettiva $\iff Kerh = \{[0]\} \iff \pi(Kerf) = \{[0]\} \iff Kerf \subset U$. Ma avevamo visto in precedenza che la condizione necessaria affinché la h esistesse, fosse che $U \subset Kerf$, dunque abbiamo una doppia inclusione e quindi un'uguaglianza: h è iniettiva $\iff Kerf = U$.
Questo ci dimostra anche il punto iii), in quanto se $U = Kerf$ allora h è iniettiva e $h : {}^{V}\!/\!_{U} \longrightarrow Imf$ è surgettiva poiché si è visto che $Imf = Imh \implies h$ è un'applicazione lineare bigettiva e dunque è un isomorfismo.

2.2 Esercizio 2

Sia $tr : M(m,n,\mathbb{K}) \mapsto \mathbb{K}$ l'applicazione traccia, che prende in input una matrice e rende in output la somma degli elementi sulla diagonale, ovvero se $A \in M(m,n,\mathbb{K})$, $tr(A) = \sum_{k=0}^{min\{m,n\}} a_{kk}$. Per $i = 1,...,min\{m,n\}$ sia $E_{ii} \in M(m,n,\mathbb{K})$ la matrice con tutti gli elementi nulli eccetto quello di posto (i,i) che vale 1, ovvero:

$$E_{ii} = \begin{pmatrix} 0_{11} & 0_{12} & \dots & \dots & 0_{1n} \\ 0_{21} & 0_{22} & \dots & \dots & 0_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{i1} & \dots & 1_{ii} & \dots & 0_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{m1} & 0_{m2} & \dots & \dots & 0_{mn} \end{pmatrix}$$

Mostrare che $M(m,n,\mathbb{K}) = Ker(tr) \oplus Span(E_{ii})$.

Dimostrazione. In generale, per dimostrare che uno spazio vettoriale è uguale alla somma diretta di due sottospazi, bisogna far vedere due cose:
1) che i due sottospazi sono effettivamente in somma diretta, ovvero che la loro intersezione è $\{0\}$
2) che sussiste una doppia inclusione tra la somma dei sottospazi e lo spazio vettoriale.
Mostriamo dunque queste due proprietà nel caso di sopra.

Cominciamo facendo vedere che $Span(E_{ii}) \cap Ker(tr) = \{0\}$. Sia allora $A \in Span(E_{ii}) \cap Ker(tr)$: poiché $A \in Span(E_{ii})$, $\exists\ \lambda \in \mathbb{K}$ tale per cui $A = \lambda E_{ii}$, ma nello stesso momento, poiché $A \in Ker(tr)$, si ha che $tr(A) = tr(\lambda E_{ii}) = 0$, ma per quanto visto in classe la traccia è un'applicazione lineare, quindi è in particolare omogenea: $tr(\lambda E_{ii}) = \lambda tr(E_{ii}) = 0 \implies \lambda = 0$, dove il passaggio è giustificato dal fatto che $tr(E_{ii}) = 1$ e $\mathbb{K}$ è un campo (quindi in esso vale la legge di annullamento del prodotto). Quindi $A = 0 \implies Span(E_{ii}) \cap Ker(tr) = \{0\}$.

Facciamo ora vedere che $M(m,n,\mathbb{K}) \subset Ker(tr) + Span(E_{ii})$ e $M(m,n,\mathbb{K}) \supset Ker(tr) + Span(E_{ii})$ (ovvero che c'è una doppia inclusione):

$\cdot \subset$: Sia $A \in M(m,n,\mathbb{K})$, ci chiediamo se esistono $\lambda \in \mathbb{K}$ e $B \in Ker(tr)$ tali per cui $A = B + \lambda E_{ii}$. Notiamo innanzitutto che se tali λ e B esistono, essi sono unici, infatti $tr(A) = tr(B) + \lambda E_{ii} = tr(B) + \lambda tr(E_{ii}) = 0 + \lambda = \lambda$: l'unico λ che può funzionare è $tr(A)$ e conseguentemente c'è un solo B possibile in quanto $B = A - \lambda E_{ii}$. Tentiamo allora di scrivere A come somma di una matrice a traccia nulla e di una matrice in $Span(E_{ii})$: con un piccolo *magheggio* otteniamo

$$A = (A - (tr(A)E_{ii})) + tr(A)E_{ii}$$

e $tr(A)E_{ii} \in Span(E_{ii})$ in quanto $tr(A) \in \mathbb{K}$; se riusciamo a dimostrare che $A - (tr(A)E_{ii})$ ha traccia nulla abbiamo vinto. Per farlo, applichiamo la traccia alla matrice $A - (tr(A)E_{ii})$:

$$tr(A - (tr(A)E_{ii})) = tr(A) - tr(tr(A)E_{ii}) = tr(A) - tr(A)tr(E_{ii}) = tr(A) - tr(A) = 0$$

Ma allora $A - tr(A)E_{ii} \in Ker(tr) \implies A \in Ker(tr) + Span(E_{ii})$.

$\cdot \supset$: ovvio, in quanto sia $Ker(tr)$ che $Span(E_{ii})$ sono sottospazi di $M(m, n, \mathbb{K})$ e per definizione di somma tra sottospazi $Ker(tr) + Span(E_{ii}) = Span(Ker(tr) \cup Span(E_{ii})) \subset M(m, n, \mathbb{K})$ poiché l'unione finita di sottospazi è un sottospazio e lo $Span$ di un sottospazio è un sottospazio.

2.3 Esercizio 3

Dati $\alpha \in \mathbb{K}$ e $p_0 \in \mathbb{K}[t]$ tali per cui $p_0(\alpha) \neq 0$, mostrare che $\mathbb{K}[t] = (t - \alpha) \oplus Span(p_0)$, dove con $(t - \alpha)$ indichiamo l'ideale generato dal polinomio $t - \alpha$.

Dimostrazione. Per dimostrare questo enunciato è indispensabile avere in mente quanto già visto nell'esercizio 3 dell'esercitazione scorsa: ricordiamoci che se con $val_\alpha : \mathbb{K}[t] \longrightarrow \mathbb{K}$ indichiamo l'applicazione "valutazione in α", il nucleo di tale applicazione è: $Ker(val_\alpha) = (t-\alpha)$. Come prima dobbiamo mostrare due cose: che l'intersezione è banale e che sussiste una doppia inclusione.
Sia allora $p \in (t - \alpha) \cap Span(p_0)$: dato che $p \in Span(p_0)$, $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tale che $p = \lambda p_0$, ma visto che tale p appartiene anche a $(t - \alpha)$, $\exists\ q \in \mathbb{K}[t]$ tale che $p(t) = (t - \alpha)q(t)$, e sostituendo di sopra: $\lambda p_0(t) = (t - \alpha)q(t)$. Applichiamo val_α a entrambi i membri e otteniamo: $val_\alpha(\lambda p_0(t)) = val_\alpha((t - \alpha)q(t)) \implies \lambda p_0(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) = 0$, ma dato che per ipotesi $p_0(\alpha) \neq 0$, si ha che $\lambda = 0$ e che dunque l'unico polinomio nell'intersezione è il polinomio nullo: i due sottospazi sono così in somma diretta.
Mostriamo ora la doppia inclusione:

$\cdot \subset$: Sia $p \in \mathbb{K}[t]$, ci chiediamo se esistono $\lambda \in \mathbb{K}$ e $q \in (t - \alpha)$ tali per cui $p = q + \lambda p_0$. Notiamo innanzitutto che se tali λ e q esistono allora sono unici, in quanto applicando val_α a entrambi i membri otteniamo: $val_\alpha(p) = val_\alpha(q + \lambda p_0) = val_\alpha(q) + val_\alpha(\lambda p_0) = val_\alpha(q) + \lambda val_\alpha(p_0) = 0 + \lambda val_\alpha(p_0) = \lambda val_\alpha(p_0)$, dove il passaggio $val_\alpha(q) = 0$ è giustificato dal fatto che $q \in (t-\alpha) = Ker(val_\alpha)$, e poiché p_0 è un polinomio fissato la cui valutazione in α è diversa da zero si ha che $\lambda = \frac{val_\alpha(p)}{val_\alpha(p_0)}$; conseguentemente a ciò anche q è unico poiché $q = p - \lambda p_0$.
Tentiamo allora di scrivere p come somma di un polinomio che si annulla in α e di un polinomio in $Span(p_0)$. Con un piccolo *magheggio* otteniamo:

$$p = \big(p - \frac{val_\alpha(p)}{val_\alpha(p_0)} p_0\big) + \frac{val_\alpha(p)}{val_\alpha(p_0)} p_0$$

che è legale in quanto $val_\alpha(p_0) \neq 0$. Notiamo ora che $\frac{val_\alpha(p)}{val_\alpha(p_0)} p_0 \in Span(p_0)$, in quanto $\frac{val_\alpha(p)}{val_\alpha(p_0)} \in \mathbb{K}$ e che $p - \frac{val_\alpha(p)}{val_\alpha(p_0)} p_0 \in Ker(val_\alpha)$, infatti:

$$val_\alpha(p - \frac{val_\alpha(p)}{val_\alpha(p_0)} p_0) = val_\alpha(p) - val_\alpha(\frac{val_\alpha(p)}{val_\alpha(p_0)} p_0) = val_\alpha(p) - \frac{val_\alpha(p)}{\cancel{val_\alpha(p_0)}} \cancel{val_\alpha(p_0)} = val_\alpha(p) - val_\alpha(p) = 0$$

Siamo dunque riusciti a scrivere p come somma di un elemento di $Ker(val_\alpha) = (t - \alpha)$ e di un elemento di $Span(p_0) \implies \mathbb{K}[t] \subset (t - \alpha) + Span(p_0)$.

$\cdot \supset$: ovvio per quanto visto nell'esercizio precedente.

2.4 Esercizio 4: caso generale degli esercizi 2 e 3

Sia $f : V \longrightarrow \mathbb{K}$ un'applicazione lineare e sia $v_0 \in V$ tale che $f(v_0) \neq 0$. Dimostra che $V = Kerf \oplus Span(v_0)$.

Dimostrazione. Cominciamo osservando una cosa importante: dato che $f(v_0) \neq 0$, f non è l'applicazione nulla. Come è fatta Imf? Sappiamo che l'immagine è un sottospazio vettoriale dello spazio di arrivo, ma nel nostro caso lo spazio d'arrivo è un campo: gli unici sottospazi di un campo $\mathbb{K}$ sono $\{0\}$ e $\mathbb{K}$ stesso (lo si può dimostrare in molti modi, il primo vedendo che se esiste un elemento $u \in U \subset \mathbb{K}$ diverso da 0 allora esistono tutti i suoi multipli, ma essendo $\mathbb{K}$ un campo, esso è chiuso per prodotto interno e ogni elemento di $\mathbb{K}$ lo si può esprimere come prodotto tra u e un altro elemento di $\mathbb{K}$; un altro modo, più semplice, prevede la conoscenza del concetto di dimensione, che verrà affrontato più avanti: ogni campo è uno spazio vettoriale di dimensione 1 su sé stesso e ogni sottospazio di uno spazio vettoriale ha dimensione minore o uguale alla dimensione dello spazio: le possibili dimensioni sono 0 o 1, quindi i possibili sottospazi sono $\{0\}$, che è l'unico sottospazio di dimensione 0 (in realtà è più in generale l'unico spazio di dimensione 0), o $\mathbb{K}$ stesso, che è l'unico sottospazio di $\mathbb{K}$ di dimensione 1). Dunque, poiché $f(v_0) \neq 0$, si ha che $Imf \neq \{0\}$ e dunque necessariamente $Imf = \mathbb{K}$, ovvero la nostra applicazione è surgettiva.

Mostriamo innanzitutto che $Kerf$ e $Span(v_0)$ sono in somma diretta. Come prima: sia $v \in Kerf \cap Span(v_0)$. Allora $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tale per cui $v = \lambda v_0$ (poiché $v \in Span(v_0)$) e $0 = f(v) = f(\lambda v_0) = \lambda f(v_0)$ (poiché $v \in Kerf$): da quest'ultima otteniamo $\lambda = 0$, dato che per ipotesi $f(v_0) \neq 0$ e $\mathbb{K}$ è un campo, quindi in esso vale la legge di annullamento del prodotto. Ma allora $v = \lambda v_0 = 0 \cdot v_0 = 0 \implies Kerf \cap Span(v_0) = \{0\}$.

Mostriamo ora invece che sussiste una doppia inclusione:

$\cdot \subset$: Sia $v \in V$. Ci chiediamo se è possibile scrivere v come un elemento di $Kerf + Span(v_0)$, ovvero se esistono $w \in Kerf$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ tali che $v = w + \lambda v_0$. Notiamo che se tali w e λ esistono, allora essi sono unici, infatti: $f(v) = f(w + \lambda v_0) = f(w) + f(\lambda v_0) = f(w) + \lambda f(v_0) = 0 + \lambda f(v_0) = \lambda f(v_0)$, dove il passaggio $f(w) = 0$ è giustificato dal fatto che $w \in Kerf$, e poiché v_0 è un vettore fissato tale per cui $f(v_0) \neq 0$ si ha che $\lambda = \frac{f(v)}{f(v_0)}$; conseguentemente a ciò anche w è unico in quanto $w = v - \lambda v_0$.
Tentiamo allora di scrivere v come somma di un elemento di $Kerf$ e di un elemento di $Span(v_0)$. Con un piccolo *magheggio* abbiamo:

$$v = (v - \frac{f(v)}{f(v_0)} v_0) + \frac{f(v)}{f(v_0)} v_0$$

che è legale in quanto $f(v_0) \neq 0$. Notiamo ora che $\frac{f(v)}{f(v_0)} v_0 \in Span(v_0)$, in quanto $\frac{f(v)}{f(v_0)} \in \mathbb{K}$ e che $v - \frac{f(v)}{f(v_0)} v_0 \in Kerf$, infatti:

$$f(v - \frac{f(v)}{f(v_0)} v_0) = f(v) - f(\frac{f(v)}{f(v_0)} v_0) = f(v) - \frac{f(v)}{\cancel{f(v_0)}} \cancel{f(v_0)} = f(v) - f(v) = 0$$

Siamo dunque riusciti a scrivere v come somma di un elemento di $Kerf$ e di un elemento di $Span(v_0) \implies V \subset Kerf + Span(v_0)$.

$\cdot \supset$ ovvio per quanto visto negli esercizi precedenti.

Con questo esercizio, che è poi fondamentalmente una proposizione, si può dimostrare ad esempio, tramite l'applicazione trasposta (che è lineare) $^\top : M(n, \mathbb{K}) \longrightarrow M(m, \mathbb{K})$, $A \mapsto A^\top$, che se $\mathbb{K}$ è un campo con $char\mathbb{K} \neq 2$, allora $M(n, \mathbb{K}) = S_n \oplus A_n$, dove con A_n indichiamo l'insieme delle matrici antisimmetriche e con S_n l'insieme delle matrici simmetriche. In breve e poco formalmente: se $A \in S_n \cap A_n$ allora $A = A^\top = -A$ da cui $2A = 0 \implies A = 0$. Inoltre, poiché l'applicazione trasposta è un'involuzione, si ha che $(A + A^\top)^\top = A^\top + (A^\top)^\top = A^\top + A$, ovvero $A + A^\top \in S_n$, e che $(A - A^\top)^\top = A^\top - (A^\top)^\top = A^\top - A = -(A - A^\top)$, ovvero $A - A^\top \in A_n$. Posso allora scrivere una qualsiasi matrice $A \in M(n, \mathbb{K})$ come segue:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top)$$

ovvero posso scrivere una qualunque matrice quadrata come somma tra una matrice simmetrica e una antisimmetrica.

2.5 Esercizio 5

Sia $f : V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare tale che $f^2 = id_V$. Sia ora $V_\lambda(f)$ l'autospazio di f relativo a λ (definito nell'esercizio 4 dell'esercitazione del 21-10). Dimostra che se $char\mathbb{K} \neq 2$ allora $V = V_1(f) \oplus V_{-1}(f)$.

Dimostrazione. Dimostriamo in primis che l'intersezione dei due autospazi è $\{0\}$: sia allora $v \in V_1(f) \cap V_{-1}(f)$. Poiché $v \in V_1(f) = Ker(f - id_V)$ si ha che $(f - id_V)(v) = 0 \iff f(v) - id_V(v) = 0 \iff f(v) - v = 0 \iff f(v) = v$ ($V_1(f)$ è detto infatti insieme dei punti fissi), ma anche $v \in V_{-1}(f) = Ker(f + id_V)$, che implica che $f(v) = -v$ (In generale $v \in V_\lambda(f) \iff f(v) = \lambda v$). Combinando le due, si ha che

$v = f(v) = -v \Longrightarrow 2v = 0 \Longrightarrow v = 0$ in quanto $2 \neq 0$ per ipotesi e $\mathbb{K}$ è un campo (dove vale la legge di annullamento del prodotto). Fatto ciò mostriamo la doppia inclusione:

$\cdot \supset$: ovvio per quanto visto (ormai troppe volte XD).

$\cdot \subset$: Mostriamo che dato $v \in V$, lo possiamo sempre scrivere come somma di un elemento di $V_1(f)$ e di un elemento di $V_{-1}(f)$. Con un *magheggio* si ottiene:

$$v = \frac{1}{2}(v + f(v)) + \frac{1}{2}(v - f(v))$$

che è effettivamente una somma tra elementi di $V_1(f)$ e $V_{-1}(f)$, infatti:

$$f(v + f(v)) = f(v) + f(f(v)) = f(v) + v$$

che è la caratterizzazione fatta all'inizio di $V_1(f)$ (il passaggio $f(f(v)) = v$ è giustificato dall'ipotesi iniziale per cui $f^2 = id_V$) e

$$f(v - f(v)) = f(v) - f(f(v)) = f(v) - v = -(v - f(v))$$

che è la caratterizzazione fatta all'inizio di $V_{-1}(f)$. Siamo così riusciti a scrivere v come somma di elementi di $V_1(f)$ e $V_{-1}(f) \Longrightarrow V \subset V_1(f) + V_{-1}(f)$.

2.6 Esercizio 6

Sia $f : V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare tale che $f^2 = f$ (un esempio di famiglia di applicazioni che soddisfa questa richiesta sono le proiezioni). Dimostra che $V = V_0(f) \oplus V_1(f)$.

Dimostrazione. Cerchiamo di capire chi sono quei due autospazi: $V_0(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\} = Kerf$. Tentare di capire chi è invece $V_1(f)$ è un po' più complicato, ma ci arriveremo alla fine dell'esercizio.

Mostriamo come sempre per prima cosa che la somma è diretta, ovvero che l'intersezione è banale: sia allora $v \in V_0(f) \cap V_1(f)$, poiché $v \in V_0(f)$ si ha che $f(v) = 0$, e poiché $v \in V_1(f)$ si ha che $f(v) = v$, ma allora $v = f(v) = 0 \implies v = 0$, ovvero $V_0(f) \cap V_1(f) = \{0\}$ e quindi la somma è diretta.

Per quanto riguarda la doppia inclusione:

$\cdot \supset$: Ovvio per quanto già visto

$\cdot \subset$: Sia $v \in V$: tentiamo di scrivere v come somma tra un elemento di $V_0(f)$ e di un elemento di $V_1(f)$, ovvero come un elemento di $V_0(f) + V_1(f)$. Naturalmente si ha che

$$v = v - f(v) + f(v)$$

Facciamo vedere che $v - f(v) \in Kerf$: applicando f otteniamo:

$$f(v - f(v)) = f(v) - f(f(v)) = f(v) - f(v) = 0$$

dove il passaggio $f(f(v)) = f(v)$ è giustificato dal fatto che $f^2 = f$ per ipotesi. Ovviamente $f(v) \in V_1(f)$ in quanto $f(f(v)) = f(v)$ per ipotesi, che è la caratterizzazione dell'autospazio $V_1(f)$. Ma c'è da notare che $\forall v \in V,\ f(v) \in Imf$ da cui si ottiene che $Imf \subset V_1(f)$, mi chiedo allora se sia vera anche l'altra inclusione: lo è in quanto $V_1(f) = \{v \in V \mid v = f(v)\}$ è un sottoinsieme dell'immagine! Abbiamo così dimostrato, tramite una doppia inclusione che $V_1(f) = Imf$ (rivedere l'inizio della dimostrazione per completezza) $\Longrightarrow$Siamo giunti alla conclusione che $V = Kerf \oplus Imf$.

2.7 Esercizio 7

Sia $f : V \longrightarrow V$ una proiezione (un'applicazione lineare tale per cui $f^2 = f$). Dimostra che:
i) $g = id_V - f$ è una proiezione
ii) $Kerg = Imf$
iii) $Img = Kerf$

Dimostrazione. i) Per far vedere che g è una proiezione definiamo prima g su un qualsiasi vettore di V e poi definiamo g^2. Sia $v \in V$, allora $g(v) = (id_V - f)(v) = id_V(v) - f(v) = v - f(v)$ e $g^2(v) = g(g(v)) = g(v - f(v)) = (id_V - f)(v - f(v)) = id_V(v - f(v)) - f(v - f(v)) = v - f(v) - f(v) + f(f(v)) = v - f(v) - f(v) + f(v) = v - f(v) = g(v)$ dove il passaggio $f(f(v)) = f(v)$ è giustificato dal fatto che $f^2 = f$ per ipotesi. Siamo dunque arrivati alla conclusione voluta: $g = g^2$.

Dimostrazione. ii) Definiamo formalmente $Kerg$:

$$Kerg = Ker(id_V - f) = \{v \in V \mid g(v) = v - f(v) = 0\} = \{v \in V \mid f(v) = v\}$$

Notiamo che tale insieme è $V_1(f)$ che, per quanto visto nell'esercizio precedente, è uguale a Imf (perché su f valgono le stesse ipotesi dell'esercizio 6) e quindi $Kerg = Imf$.

Dimostrazione. iii) Mostriamo che i due sottospazi sono uguali tramite una doppia inclusione:
$\cdot \supset$: Sia $v \in Kerf$, allora naturalmente $f(v) = 0$. Applichiamo g a tale v e vediamo cosa succede: $g(v) = v - f(v) = v$ e dunque si ha che $v \in Img$ poiché v è immagine tramite g di sé stesso $\Longrightarrow Kerf \subset Img$ (notare che v è un punto fisso di g, quindi si ha che $Kerf \subset V_1(g)$ e poiché g è una proiezione, per quanto visto nell'esercizio 6, si ha che $V_1(g) = Img$).

$\cdot \subset$: Sia $w \in Img$, ciò significa che $\exists\ v \in V$ tale che $g(v) = w$. Voglio dimostrare che $w \in Kerf$. Applichiamo allora f a w e vediamo cosa succede:

$$f(w) = f(g(v)) = f(v - f(v)) = f(v) - f(f(v)) = f(v) - f(v) = 0$$

Dunque $w \in Kerf \Longrightarrow Img \subset Kerf$, e per doppia inclusione $Img = Kerf$.

2.8 Esercizio 8

Sia $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare che manda il vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ 2x - y - 2z \end{pmatrix}$.
Determina la matrice A associata a tale g (cioè la matrice tale per cui $L_A = g$).

Dimostrazione. Per determinare la matrice associata a un'applicazione lineare, in generale, devo riuscire a scrivere il vettore d'arrivo come combinazione lineare di alcuni vettori tale per cui i coefficienti della combinazione lineare devono essere x, y, z. In questo caso specifico, scrivere $\begin{pmatrix} x + 2y - z \\ 2x - y - 2z \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di x, y, z è abbastanza semplice, infatti vediamo subito che

$$\begin{pmatrix} x + 2y - z \\ 2x - y - 2z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ora: i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ rappresentano le colonne della matrice A associata a g, dunque A è fatta come segue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Per verificare che in effetti la matrice associata a g sia proprio la A di sopra applichiamo a un generico vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ la matrice A (tramite l'applicazione $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ che associa al vettore $v \in \mathbb{R}^3$ il prodotto $A \cdot v$):

$$L_A(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ 2x - y - 2z \end{pmatrix} = g(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix})$$

che ci mostra che la matrice A è proprio la matrice associata a g.

3 Esercitazione 29-10-2021

3.1 Esercizio 1

Sia $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare vista nell'esercizio 8 della scorsa esercitazione, che manda il vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y-z \\ 2x-y-2z \end{pmatrix}$. Studiare la surgettività e l'iniettività di questa applicazione.

Svolgimento: Studiare la surgettività di un'applicazione lineare significa studiarne l'immagine. Consideriamo Img: per quanto visto a lezione, se g è un'applicazione lineare e A è la matrice associata a g allora $Img = ImA$ che per definizione è $Span(A^1 \,|...|\, A^n)$, dove con A^i indico la colonna i-esima di A, con $i \in \{1, ..., n\}$. Sappiamo che le colonne di A sono i 3 vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, quindi si ha che

$$Img = ImA = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix})$$

Notiamo tuttavia che $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, ovvero $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \in Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix})$. Otteniamo che l'immagine si riduce a $Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix})$. Chiedersi allora se l'applicazione è surgettiva equivale a chiedersi se $Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}) = \mathbb{R}^2$, ovvero se i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ generano $\mathbb{R}^2$. Per farlo notiamo che possiamo scrivere $\mathbb{R}^2$ come $Span(e_1, e_2)$ (sappiamo che e_1, e_2 generano $\mathbb{R}^2$ perché visto in classe). Dimostrare allora che $Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}) = \mathbb{R}^2$ o dimostrare che $Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}) = Span(e_1, e_2)$ è la stessa cosa (ma conviene di più!). Mostriamo allora che sussiste una doppia inclusione: per farlo dobbiamo utilizzare un fatto noto dalla teoria, ovvero che se $X \subset V$ allora $Span(X) \subset V$ (e in particolare è un suo sottospazio). Dimostriamo dunque questa doppia inclusione:

$\cdot \subset$: ovvio in quanto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ e per quanto abbiamo detto poco fa segue che $Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}) \subset \mathbb{R}^2$.

$\cdot \supset$: Dobbiamo verificare se e_1 e e_2 appartengono o meno a $Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix})$, ovvero se esistono due combinazioni lineari di $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ uguali rispettivamente a e_1 e a e_2. Con semplici calcoli algebrici otteniamo che

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = e_1$$

$$\frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = e_2$$

Quindi sussiste una doppia inclusione, il che dimostra che la g è surgettiva.
(N.B. Con il concetto di base tutto questo non sarebbe stato necessario, tuttavia questo argomento non è ancora stato affrontato a lezione, quindi mi sono attenuto a quanto fatto finora).

Studiare invece l'iniettività di un'applicazione lineare significa studiarne il nucleo. Per quanto visto a lezione, se g è un'applicazione lineare e A la matrice associata a g, allora $Kerg = KerA = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, g(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Trovare i vettori $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ che appartengono a $Kerg$ significa determinare gli $x, y, z \in \mathbb{R}$

che risolvono il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z &= 0 \\ 2x - y - 2z &= 0 \end{cases}$$

Il sistema di sopra si risolve $\iff x = z$ e $y = 0$. Ciò significa che i vettori della forma $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$ con $x \in \mathbb{R}$ sono tutti e soli i vettori appartenenti a $Kerg$. Notiamo però che, poiché x è libero di variare su tutto $\mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, quindi si conclude che $Kerg = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ e dunque la g non è iniettiva.

3.2 Esercizio 2

Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare. Sappiamo che $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e che $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare $f(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix})$, quindi studiare Imf e $Kerf$.

Soluzione: In questo particolare esercizio viene richiesto esplicitamente di trovare l'immagine di un certo vettore tramite omomorfismo conoscendone altre due. L'idea per risolvere questi tipi di esercizi è sempre la stessa: tentare di scrivere il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Procediamo come segue: chiediamoci prima di tutto se i due vettori generano $\mathbb{R}^2$. Facciamo come nell'esercizio 1: verifichiamo se sussiste una doppia inclusione tra $Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ e $Span(e_1, e_2)$. Per farlo notiamo che l'inclusione $\subset$ è ovvia in quanto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ e quindi $Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) \subset \mathbb{R}^2$, mentre l'altra inclusione si ha in quanto

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e dunque $e_1, e_2 \in Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) \Longrightarrow Span(e_1, e_2) \subset Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Ora che abbiamo verificato che i due vettori generano $\mathbb{R}^2$, scriviamo il nostro vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. In particolare si ha che

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da qui allora è facile determinare $f(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix})$:

$$f(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Potevamo ottenere lo stesso risultato passando per una combinazione lineare differente: quella di e_1, e_2: infatti, poiché $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

abbiamo che $f(e_1) = f(-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) = -f(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix})+2f(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) = -\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ e $f(e_2) = f(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}) - f(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$, e quindi poiché $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = 2e_1 + 3e_2$, si ha

$$f(\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}) = f(2e_1 + 3e_2) = 2f(e_1) + 3f(e_2) = 2\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}$$

concordemente a quanto trovato prima.
Ma perché abbiamo voluto allungare così tanto il problema? Perché in generale studiare un'applicazione lineare da $\mathbb{K}^n$ in $\mathbb{K}^m$ sull'insieme di generatori $\{e_1, ..., e_n\}$ è più facile e più conveniente che studiare la stessa applicazione su un altro insieme di generatori. In particolare questo risulterà più chiaro una volta affrontato il concetto di matrice di cambio di base... Per ora rimaniamo sul semplice e continuiamo il nostro studio tramite e_1, e_2.

Vogliamo studiare la surgettività dell'applicazione di sopra: sappiamo dalla teoria che se $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ allora la matrice associata a f è una matrice 3×2 che ha per colonne le immagini di f su e_1, e_2, che abbiamo già trovato prima. Quindi, se chiamiamo M_f la matrice associata a f, avremo che:

$$M_f = \begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}$$

Accertiamoci che funzioni: se $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ allora $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = xe_1 + ye_2$, da cui otteniamo che $f(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}) = f(xe_1 + ye_2) = xf(e_1) + yf(e_2) = x\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ che è effettivamente il prodotto tra M_f e $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.
Chiedersi chi sia l'immagine di f è come chiedersi chi sia l'immagine di M_f, ovvero chi sia $Span(M_f^1|M_f^2)$: studiamo allora $Span(\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix})$. Non è difficile notare che i due vettori sono linearmente indipendenti, difatti se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ allora $\alpha\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ se e solo se $\alpha = \beta = 0$. Quindi il loro $Span$ è un piano dentro $\mathbb{R}^3$ (che è un sottospazio proprio di $\mathbb{R}^3$) $\Longrightarrow$ la f non è dunque surgettiva (per mostrarlo direttamente invece basta dare un esempio di un vettore di $\mathbb{R}^3$ che non appartiene a $Span(\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix})$... con semplici passaggi algebrici vediamo che per esempio il vettore $\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} \notin Span(\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix})$).
Studiare invece l'iniettività significa studiare il nucleo dell'applicazione, ovvero il nucleo della matrice: per farlo dobbiamo determinare le soluzioni di $M_f \cdot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0$, ovvero del seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x & = 0 \\ -x + 2y & = 0 \\ x & = 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione possibile del sistema di sopra è il vettore $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Longrightarrow Ker f = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \right\} \Longleftrightarrow f$ è iniettiva.

P.S.: Non abbiamo direttamente definito chi è l'immagine di f, ci siamo limitati a studiarne la surgettività. Se volessimo descrivere chi è Imf faremmo come segue: sia $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Span(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}) \iff \exists\, a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ovvero se il seguente sistema

$$\begin{cases} x &= 2a \\ y &= -a + 2b \\ z &= a \end{cases}$$

ha soluzione. Appartengono dunque a $Span(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix})$ tutti e soli i vettori del tipo $\begin{pmatrix} 2a \\ -a + 2b \\ a \end{pmatrix}$, ovvero tutti i vettori che hanno la terza coordinata uguale alla metà della prima. Se volessi scrivere l'immagine con un'equazione scriverei:

$$Imf = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x - 2z = 0 \right\}$$

che se si vuole essere raffinati è $Ker(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix})$ (ovvero il nucleo della matrice 1×3 associata all'applicazione che manda $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in $x - 2z$) :)

3.3 Esercizio 3

Siano $v_1, ..., v_k \in \mathbb{K}^n$. Dimostra che $\forall \lambda \neq 0$, $Span(v_1, ..., v_k) = Span(\lambda v_1, ..., v_k)$ (ovvero dimostra che moltiplicando i vettori di uno span per degli scalari non nulli lo Span non cambia).

Dimostrazione. Dimostriamo che sussiste una doppia inclusione tra i due insiemi.
N.B. Gli insiemi di sopra sono sottospazi generati, quindi mi basta mostrare che i singoli insiemi sono contenuti rispettivamente nel primo Span e nel secondo.

$\cdot \supset$: mostriamo che $\lambda v_1, ..., v_k \in Span(v_1, ..., v_k)$. È chiaro che questo è vero in quanto $v_2, ..., v_k \in Span(v_1, ..., v_k)$ e $\lambda v_1 \in Span(v_1, ..., v_k)$ in quanto stiamo moltiplicando v_1, che appartiene a $Span(v_1, ..., v_k)$, per uno scalare.

$\cdot \subset$: anche questa inclusione è ovvia in quanto $v_2, ..., v_k \in Span(\lambda v_1, ..., v_k)$ naturalmente e $v_1 \in Span(\lambda v_1, ..., v_k)$ in quanto $v_1 = \frac{\lambda v_1}{\lambda}$ (si noti che sfruttiamo qui l'ipotesi $\lambda \neq 0$).

3.4 Esercizio 4

Siano $v_1, ..., v_k \in \mathbb{K}^n$. Dimostra che $\forall \mu \in \mathbb{K}$, $Span(v_1, ..., v_k) = Span(v_1 + \mu v_2, ..., v_k)$.

Dimostrazione. Anche qui è necessario far vedere la doppia inclusione.

$\cdot \subset$: mostriamo che $v_1, ..., v_k \in Span(v_1 + \mu v_2, ..., v_k)$. Questo è ovvio in quanto $v_2, ..., v_k \in Span(v_1 + \mu v_2, ..., v_k)$ e $v_1 = v_1 + \mu v_2 - \mu v_2$.

$\cdot \supset$: anche questa inclusione è ovvia in quanto $v_2, ..., v_k \in Span(v_1, ..., v_k)$ e $v_1 + \mu v_2 \in Span(v_1, ..., v_k)$ in quanto $v_1 + \mu v_2 \in Span(v_1, v_2)$ e $Span(v_1, v_2) \subset Span(v_1, ..., v_k)$.

N.B. Poiché la teoria non richiede che l'insieme dei generatori dello *Span* sia ordinato, la combinazione $V_i + \mu v_j$ può essere fatta per ogni vettore appartenente a $\{v_1, ..., v_k\}$ semplicemente cambiando l'ordine dei vettori, ovvero portando l'i-esimo vettore al primo posto e il j-esimo vettore al secondo posto.

3.5 Esercizio 5

Siano g l'applicazione dell'Esercizio 1 e f l'applicazione dell'esercizio 2. Determinare chi è $Ker g \cap Im f$.

Soluzione: come abbiamo già visto, si ha che $Ker g = Span(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix})$ e $Im f = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x - 2z = 0 \right\}$ (nota che sono entrambi sottospazi di $\mathbb{R}^3$). Determinare l'intersezione dei due sottospazi significa far valere tutte le condizioni di appartenenza ai sottospazi contemporaneamente: appartenere a $Ker g$ significa essere un vettore di $\mathbb{R}^3$ e avere la terza coordinata uguale alla prima e la seconda coordinata nulla; appartenere a $Im f$ invece significa avere la prima coordinata uguale al doppio della terza: l'intersezione dei due sottospazi è così descritta dal seguente

$$Ker g \cap Im f = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x = z, x = 2z, y = 0 \right\}$$

Ovviamente l'unico vettore appartenente all'intersezione è il vettore nullo $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, in quanto dal fatto che $x = z$ e $x = 2z$ si ha che $z = 2z$ ovvero $z = 0$ e quindi $x = 0$, e inoltre $y = 0$ per ipotesi.
A livello concettuale la cosa ha anche senso in quanto l'immagine di f è un piano dentro a $\mathbb{R}^3$, mentre il nucleo di g è una retta: le possibili intersezioni in questa situazione sono 2: i due sottospazi si intersecano nell'origine; la retta giace sul piano (nota che retta e piano NON possono essere disgiunti, in quanto sono entrambi sottospazi, ovvero entrambi contengono il vettore nullo).

Osservazione: Se U e W sono due sottospazi di uno stesso spazio vettoriale V descritti da equazioni, allora la loro intersezione $U \cap W$ si ottiene facendo valere tutte le equazioni contemporaneamente, ovvero risolvendo un sistema lineare.

3.6 Esercizio 6

Siano $W = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| 2x - y + 2z + t = 0 \right\}$ (è un iperpiano di $\mathbb{R}^4$) e $U = Span(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\2\\-1\end{pmatrix})$ due sottospazi di $\mathbb{R}^4$. Descrivi l'intersezione $U \cap W$.

Soluzione: chiediamoci come è fatto un vettore dell'intersezione. Sia allora $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in U \cap W$, poiché tale vettore sta in U sarà combinazione lineare dei vettori che generano U, quindi sarà un vettore del tipo

$$\alpha \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}0\\-1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha + \beta\\ \alpha + 2\beta - \gamma\\ \beta + 2\gamma\\ -\beta - \gamma\end{pmatrix}$$

con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ Ma dal momento che tale vettore sta anche in W, deve rispettare le condizioni di appartenenza a W e quindi: $2(\alpha + \beta) - (\alpha + 2\beta - \gamma) + 2(\beta + 2\gamma) + (-\beta - \gamma) = 0$, ovvero $\alpha + \beta + 4\gamma = 0$ e ricavando β otteniamo $\beta = -\alpha - 4\gamma$. Quindi la scelta di α e γ è arbitraria, mentre β non è libero, ma dipende direttamente dalla scelta di α e β. Dunque possiamo riscrivere il vettore

$$\begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha+2\beta-\gamma \\ \beta+2\gamma \\ -\beta-\gamma \end{pmatrix}$$

nelle sole coordinate α e γ:

$$\begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha+2\beta-\gamma \\ \beta+2\gamma \\ -\beta-\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\gamma \\ -\alpha-9\gamma \\ -\alpha-2\gamma \\ \alpha+3\gamma \end{pmatrix}$$

quindi tutti e soli i vettori di questo tipo appartengono all'intersezione. Notiamo inoltre che possiamo riscrivere il vettore di sopra nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} -4\gamma \\ -\alpha-9\gamma \\ -\alpha-2\gamma \\ \alpha+3\gamma \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

che assomiglia molto a uno Span :)

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = Span(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix})$$

Giungiamo così alla conclusione che $U \cap W = Span(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix})$.

Osservazione: la procedura generale per trovare l'intersezione di due spazi come sopra è quindi quella di prendere un vettore appartenente all'intersezione e far sì che entrambe le condizioni vengano rispettate contemporaneamente, risolvendo un sistema lineare. In generale quindi se $U = Span(v_1, ..., v_k) \subset \mathbb{K}^n$ e $W = \{x \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot x = 0\} \subset \mathbb{K}^n$, per determinare $U \cap W$ si prende la combinazione lineare di $v_1, ..., v_k$ che genera x: $x = a_1v_1 + ... + a_kv_k$, con $a_1, ..., a_k \in \mathbb{K}$ e poi si sostituisce tale combinazione lineare nella condizione $A \cdot x = 0 \implies a_1Av_1 + ... + a_kAv_k = 0$ che dà origine a un sistema lineare. Infine, trovata una condizione parametrica che descrive l'intersezione, si semplifica l'espressione il più possibile, trovando alcuni parametri in funzione di altri.

3.7 Esercizio 7

Siano $U = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix})$ e $W = Span(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix})$ due sottospazi di $\mathbb{R}^3$. Determinare $U \cap W$.

Soluzione: Sia $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U \cap W$, allora, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è combinazione lineare sia di $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ che di $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ovvero $\exists \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Possiamo allora trovare una relazione tra α, β, γ e δ impostando un sistema lineare:

$$\begin{cases} \alpha - \beta & = -\gamma \\ 2\alpha + 2\beta & = -\gamma + 3\delta \\ 3\alpha & = \gamma + \delta \end{cases}$$

Ricaviamo allora γ e δ in funzione di α e β: dalla prima ricaviamo che $\gamma = \beta - \alpha$, sostituendo nella terza si ha che $\delta = 4\alpha - \beta$. Ricaviamo ora β in funzione di α: dalla seconda si ottiene $11\alpha = 6\beta$, da cui $\beta = \frac{11}{6}\alpha$. Ma allora la combinazione lineare di sopra si riduce a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{11}{6}\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{17}{6} \\ 3 \end{pmatrix}$$

ovvero ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ appartenente all'intersezione è del tipo $\alpha \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{17}{6} \\ 3 \end{pmatrix}$, ma questo è proprio $Span(\begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{17}{6} \\ 3 \end{pmatrix}) \Longrightarrow U \cap W = Span(\begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{17}{6} \\ 3 \end{pmatrix})$ e, siccome noi siamo persone a cui non piacciono le frazioni, grazie all'esercizio 3 possiamo moltiplicare per 6 e ottenere

$$U \cap W = Span(\begin{pmatrix} -5 \\ 17 \\ 18 \end{pmatrix})$$

Osservazione: se abbiamo U e W sottospazi descritti come *Span*, per esempio: $U = Span(v_1, ..., v_k) \subset \mathbb{K}^n$ e $W = Span(w_1, ..., w_h) \subset \mathbb{K}^n$, per ricavare la loro intersezione possiamo fare come sopra, ovvero prendere un certo vettore $x \in U \cap W$, scriverlo come combinazione lineare di $v_1, ..., v_k$ e di $w_1, ..., w_h$, eliminare un set di parametri risolvendo un sistema lineare e ricavando parametri da altri parametri, trovando così dei parametri per i generatori.

3.8 Esercizio 8 che non è un esercizio

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano $v_1, ..., v_k \in V$. Dimostrare che $v_1, ..., v_k$ sono linearmente indipendenti equivale a dimostrare che dati $a_1, ..., a_k \in \mathbb{K}$ tali che $a_1v_1 + ... + a_kv_k = 0$ si ha necessariamente che $a_1 = ... = a_k = 0$, per definizione di indipendenza lineare.

Cerchiamo di capire come sono fatte queste combinazioni lineari: analizziamo i casi $k = 1, 2, 3$.
i Se $k = 1$ allora si ha solo v_1, che è linearmente indipendente se e solo se è diverso dal vettore nullo. Infatti ogni combinazione lineare di v_1 è del tipo αv_1 con $\alpha \in \mathbb{K}$ e questa è nulla se e solo se o α o v_1 è uguale a 0, ma si è richiesto $V_1 \neq 0$, quindi necessariamente si deve avere che $\alpha = 0$.

ii Se $k = 2$, per quanto visto a lezione, sappiamo che v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti $\Longleftrightarrow v_1 \neq 0$ e $v_2 \notin Span(v_1)$. Dimostriamolo velocemente: $(\Longrightarrow)$ $\{v_1\} \subset \{v_1, v_2\}$ quindi è linearmente indipendente in quanto sottoinsieme di un insieme linearmente indipendente ed è non nullo per il punto di sopra. Inoltre se $v_2 \in Span(v_1)$, allora si avrebbe che $v_2 = \lambda v_1$ per un certo $\lambda \in \mathbb{K}$, ma quindi $v_2 - \lambda v_1$ sarebbe una combinazione lineare nulla di v_1, v_2 a coefficienti non nulli, che è assurdo per ipotesi: ne segue che $v_2 \notin Span(v_1)$. $(\Longleftarrow)$ Supponiamo per assurdo che v_1 e v_2 siano linearmente dipendenti, allora $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ non nulli (in teoria sarebbe non entrambi nulli, ma essendo due, se $\alpha = 0$ allora $\beta v_2 = 0$ che implica $\beta = 0$ in quanto v_2 non può essere 0, altrimenti sarbbe un elemnento di $Span(v_1)$, e invece se $\beta = 0$, allora necessariamente $\alpha = 0$ in quanto $v_1 \neq 0$ per ipotesi) tali che $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$, ma allora si avrebbe che $v_2 = -\frac{\alpha v_1}{\beta} \in Span(v_1)$ che è assurdo per ipotesi. Dunque v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti.

iii Se invece k=3 vogliamo dimostrare che dati tre vettori $v_1, v_2, v_3 \in V$, essi sono linearmente indipendenti $\Longleftrightarrow v_1 \neq 0$, $v_2 \notin Span(v_1)$ e $v_3 \notin Span(v_1, v_2)$, la cui dimostrazione è analoga a quella del caso precedente.
Siamo allora pronti per dimostrare un enunciato molto più generico riguardo all'indipendenza lineare... ma lo faremo nella prossima esercitazione :).

4 Esercitazione 04-11-2021

4.1 Esercizio 1

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano $v_1, ..., v_k \in V$. Dimostra che $v_1, ..., v_k$ sono linearmente indipendenti $\iff$
i) dati $a_1, ..., a_k \in \mathbb{K}$ tali che $a_1v_1 + ... + a_kv_k = 0$ si ha necessariamente che $a_1 = ... = a_k = 0$ (definizione)
ii) $\forall i \in \{1, ..., k\}$, $v_i \notin Span(v_1, ..., \cancel{v_i}, ..., v_k)$
iii) $\forall i \in \{1, ..., k\}$, $v_i \notin Span(v_1, ..., v_{i-1})$ (dove se $i = 1$ si intende che $v_1 \notin Span(\emptyset) = \{0\}$)

Dimostrazione. Vogliamo far vedere che tutte queste sono definizioni di indipendenza lineare equivalenti, ovvero che si coimplicano l'una con l'altra. Mostreremo le implicazioni in questo modo: $i \iff ii$, $ii \implies iii$, $iii \implies i$

i) $\iff$ *ii)* : Già dimostrato a teoria. La dimostrazione si basava su due assurdi, uno per la freccia verso destra, l'altro per la freccia verso sinistra.

ii) $\implies$ *iii)* : Sappiamo per ipotesi che $v_i \notin Span(v_1, ..., \cancel{v_i}, ..., v_k)$, ma allora non appartiene neanche ad alcun sottoinsieme di $Span(v_1, ..., \cancel{v_i}, ..., v_k)$ e dato che $Span(v_1, ..., v_{i-1}) \subset Span(v_1, ..., \cancel{v_i}, ..., v_k)$ si ottiene la tesi.

iii) $\implies$ *i)* : Sia $h = max\{r \mid v_1, ..., v_r \text{ soddisfi } i)\}$. Vogliamo dimostrare che $h = k$ (naturalmente $h \leq k$). Ci basta allora dimostrare che $h \not< k$. Supponiamo allora per assurdo $h < k$. Allora i vettori $v_1, ..., v_h$ soddisfano *i)*, mentre i vettori $v_1, ..., v_h, v_{h+1}$ non la soddisfano, esistono dunque $a_1, ..., a_{h+1} \in \mathbb{K}$ NON tutti nulli tali che $a_1v_1 + ... + a_{h+1}v_{h+1} = 0$. Se fosse $a_{h+1} = 0$ si avrebbe allora $a_1v_1 + ... + a_hv_h = 0$ che implica $a_1 = ... = a_h = 0$ in quanto $v_1, ..., v_h$ soddisfano la *i)*, ma questo è assurdo (sono tutti nulli lol). Allora necessariamente $a_{h+1} \neq 0$, da cui segue che posso ricavare v_{h+1} come combinazione lineare di $v_1, ..., v_h$: $v_{h+1} = -\frac{1}{a_{h+1}}(a_1v_1 + ... + a_hv_h) \implies v_{h+1} \in Span(v_1, ..., v_h)$, che è assurdo per ipotesi. Dunque $h = k$ e concludiamo la dimostrazione.

Potevamo dimostrare le stesse implicazioni tramite altre vie, ad esempio dimostrando che *i)* $\implies$ *iii)* senza passare da *ii)* e che *iii)* $\implies$ *ii)* senza usare *i)*:

i) $\implies$ *iii)* : Supponiamo per assurdo che $\exists i \in \{1, ..., k\}$ tale che $v_i \in Span(v_1, ..., v_{i-1})$, allora $\exists a_1, ..., a_{i-1}$ tali per cui $a_1v_1 + ... + a_{i-1}v_{i-1} = v_i$. Ma allora $a_1v_1 + ... + a_{i-1}v_{i-1} - v_i = 0$ è una combinazione lineare nulla con coefficienti non tutti nulli (è certo dal fatto che il coefficiente di v_i sia 1), che è assurdo per ipotesi. Per cui la tesi è confermata.

iii) $\implies$ *ii)* : Notiamo una cosa importante: questa proprietà dipende dall'ordinamento dei vettori, poiché prende in considerazione un indice e gli indici precedenti. Ma è vero che se permutiamo i vettori in un qualsiasi modo, essi continuano a essere linearmente indipendenti. Morale: poiché l'indipendenza lineare non dipende dall'ordinamento possiamo permutare l'insieme dei vettori per renderci le cose più comode. In particolare, se $\sigma : \{1, ..., k\} \longrightarrow \{1, ..., k\}$ è una permutazione che associa a $i \in \{1, ..., k\}$ l'indice $\sigma(i)$ avremo che, con un dovuto riordinamento, per la *iii)*
$\exists\, v_{\sigma(1)}$ tale che $v_{\sigma(1)} \neq 0$
$\exists\, v_{\sigma(2)}$ tale che $v_{\sigma(2)} \notin Span(v_{\sigma(1)})$
$\exists\, v_{\sigma(3)}$ tale che $v_{\sigma(3)} \notin Span(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)})$
...
$\exists\, v_{\sigma(i)}$ tale che $v_{\sigma(i)} \notin Span(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(i-1)})$
...
Da qui risulta naturale che $\forall i \in \{1, ..., k\}$ esista una permutazione σ tale per cui $v_{\sigma(i)} = v_k$, e quindi per la *iii)* $v_{\sigma(i)} \notin Span(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(i-1)}) = Span(v_1, ..., \cancel{v_i}, ..., v_k)$.

4.2 Esercizio 2

Sia $V = M(2, \mathbb{R})$ lo spazio delle matrici di taglia 2×2 e siano

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

tre matrici di V. Ci chiediamo se queste tre matrici siano o meno linearmente indipendenti.

Soluzione: consideriamo una combinazione lineare nulla di A, B, C. Siano dunque $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e sia $\alpha A+\beta B+\gamma C = 0$ la combinazione lineare nulla di sopra. Descriviamo tale combinazione in forma matriciale:

$$\alpha A+\beta B+\gamma C = \alpha \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}+\beta \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}+\gamma \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha+2\beta+2\gamma & \alpha+2\gamma \\ \alpha+\beta+\gamma & 3\alpha+4\beta+2\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tale matrice è uguale alla matrice nulla se e solo se tutti i coefficienti della matrice sono uguali a 0. Eguagliando tutti i coefficienti a 0 ci troviamo davanti a un sistema lineare 4×3 (4 equazioni e 3 incognite) da risolvere:

$$\begin{cases} 2\alpha+2\beta+2\gamma & = 0 \\ \alpha+2\gamma & = 0 \\ \alpha+\beta+\gamma & = 0 \\ 3\alpha+4\beta+2\gamma & = 0 \end{cases}$$

Notiamo però che la terza equazione implica banalmente la prima (le due espressioni a sinistra sono una il doppio dell'altra): il sistema si riduce a un sistema 3×3:

$$\begin{cases} \alpha+2\gamma & = 0 \\ \alpha+\beta+\gamma & = 0 \\ 3\alpha+4\beta+2\gamma & = 0 \end{cases}$$

Tale sistema ammette soluzione (non unica): con semplici passaggi algebrici ricaviamo infatti che $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = -1$ è una soluzione del sistema. Ma allora $2A - B - C = 0$ è una combinazione lineare nulla a supporto non vuoto (ovvero esistono dei coefficienti non tutti nulli tali per cui la combinazione lineare associata a quei coefficienti dia come risultato la matrice nulla). Segue da qui che le 3 matrici non sono linearmente indipendenti.

Osservazione: consideriamo $Span(A, B, C)$. Poiché le 3 matrici non sono linearmente indipendenti, lo $Span$ si può "semplificare", ovvero possiamo togliere una delle tre matrici dall'insieme di generatori dello $Span$ e non farlo cambiare. Quale togliamo? Per quanto visto a lezione, dobbiamo togliere una matrice che sia combinazione lineare delle altre due (in questo caso posso sceglierle tutte e 3): prendiamo ad esempio C. Per la combinazione di sopra si ha che $C = 2A - B$, ovvero C è combinazione lineare di A e B. Dunque C può essere eliminato dall'insieme di generatori dello $Span$: $Span(A, B, C) = Span(A, B)$. Come dicevamo prima però, in questo caso particolare ogni matrice è combinazione lineare delle altre, infatti $A = \frac{B+C}{2}$ e $B = 2A - C$, da cui segue che $Span(A, B, C) = Span(A, B) = Span(A, C) = Span(B, C)$ per lo stesso ragionamento.

4.3 Esercizio 3

Sia $V = M(2, \mathbb{R})$ lo spazio delle matrici di taglia 2×2 e siano

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

tre matrici di V. Dimostra che $dimSpan(A, B, C) = 2$.

Dimostrazione. Dimostrare che la dimensione dello $Span(A, B, C)$ è 2 equivale a dimostrare che una qualsiasi base di $Span(A, B, C)$ è composta da 2 elementi. Per definizione una base è un insieme ordinato linearmente indipendente di generatori: grazie all'Esercizio 2 di sopra sappiamo che $\{A, B\}$ è un insieme di generatori per $Span(A, B, C)$: ci resta solo da dimostrare allora che $\{A, B\}$ è un insieme linearmente indipendente. Mostriamo dunque che A e B sono linearmente indipendenti. Per farlo consideriamo una loro combinazione lineare nulla: siano allora $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e sia $\alpha A + \beta B = 0$ una combinazione lineare nulla di A e B. Vogliamo far vedere che $\alpha = \beta = 0$. Descriviamo la combinazione lineare in forma matriciale:

$$\alpha A + \beta B = \alpha \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha+2\beta & \alpha \\ \alpha+\beta & 3\alpha+4\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dalla prima riga, seconda colonna si nota subito che l'unico modo affinché l'elemento in questa posizione sia zero è che $\alpha = 0$, che implica necessariamente $\beta = 0$. Ma allora abbiamo ottenuto che $\alpha = \beta = 0$, ovvero che l'unico modo di scrivere 0 come combinazione lineare di A e B è quello di porre i coefficienti uguali a 0. Questo dimostra che A e B sono linearmente indipendenti $\Longrightarrow \{A, B\}$ è una base di $Span(A, B, C)$, da cui $dimSpan(A, B, C) = 2$.

Osservazione: Così facendo abbiamo dimostrato che anche $\{A, C\}$ e $\{B, C\}$ sono linearmente indipendenti. Infatti anch'essi rappresentano una base di $Span(A, B, C)$ dato che, per quanto visto a teoria, sono generatori (Esercizio 2) e "nel numero giusto" (ovvero sono tanti quanti la dimensione di $Span(A, B, C)$).

4.4 Esercizio 4

Sia $V = \mathbb{R}[t]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ e siano $p_1 = t^2 + 1$, $p_2 = 3t - 2$, $p_3 = t^4 - t - 1$ e $p_4 = 2t^5 - t^4 + 3t^2 + t^2 - 2t + 5$ quattro polinomi di V. Dimostrare che p_1, p_2, p_3, p_4 sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Dimostriamolo con la proprietà *iii*) dell'Esercizio 1 (cioè, mostriamo che possiamo dimostrare l'indipendenza lineare non considerando combinazioni lineari, ma solo gli *Span*): riordiniamo i polinomi come segue: p_2, p_1, p_3, p_4. Controlliamo se la proprietà *iii*) dell'Esercizio 1 è verificata:
· Il polinomio p_2 è diverso da 0, quindi non appartiene a $Span(\emptyset) = \{0\}$, inoltre $Span(p_2) \subset \mathbb{R}_1[t]$ poiché p_2 ha grado 1 (moltiplicare per uno scalare un polinomio di grado 1 non può fare alzare il grado). Ma allora p_1 (che appartiene a $\mathbb{R}_2[t]$ poiché ha grado 2) non appartiene a $Span(p_1)$: $p_1 \notin Span(p_2)$ (stiamo effettivamente mostrando che il polinomio i-esimo non appartiene allo span dei precedenti).
· Il polinomio p_3 ha grado 4; ci chiediamo se esso appartenga o meno a $Span(p_1, p_2)$. Dal momento che però p_2 ha grado 1 e p_1 ha grado 2, per quanto visto a lezione, una qualsiasi loro combinazione lineare avrà grado al massimo 2. Quindi non esiste nessuna combinazione lineare di p_1, p_2 che generi un polinomio di grado 4, ovvero $p_3 \notin Span(p_1, p_2)$.
· Il polinomio p_4 ha grado 5; ci chiediamo se esso possa appartenere a $Span(p_1, p_2, p_3)$. Dal momento che p_2 ha grado 1, p_1 ha grado 2 e p_3 ha grado 4, per quanto visto a lezione, una qualsiasi loro combinazione lineare avrà grado al massimo 4. Quindi non esiste nessuna combinazione lineare di p_1, p_2, p_3 che generi un polinomio di grado 5, ovvero $p_4 \notin Span(p_1, p_2, p_3)$.
Questo conclude la dimostrazione, dal momento che la proprietà *iii*) è verificata e abbiamo dimostrato essere equivalente alla definizione di indipendenza lineare.

Osservazione: più in generale se $p_1, ..., p_k \in \mathbb{K}[t]$ sono k polinomi tutti di gradi distinti, allora sono linearmente indipendenti.

4.5 Esercizio 5

Siano $a_1, ..., a_k \in \mathbb{K}$ k scalari distinti. Sia inoltre, per ogni $i \in \{1, ..., k\}$, $f_i = val_{a_i} : \mathbb{K}[t] \longrightarrow \mathbb{K}$ l'applicazione (lineare) "valutazione in a_i", che associa al polinomio $p \mapsto p(a_i)$. Dimostra che $f_1, ..., f_k \in Hom(\mathbb{K}[t], \mathbb{K})$ sono linearmente indipendenti (ricordiamo che se V e W sono $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, allora $Hom(V, W)$ è uno spazio vettoriale).

Dimostrazione. Dimostriamo l'indipendenza lineare delle k applicazioni lineari tramite la proprietà *ii*) dell'Esercizio 1. Vogliamo dunque dimostrare che $\forall i \in \{1, ..., k\}$, $f_i \notin Span(f_1, ..., \cancel{f_i}, ..., f_k)$.
Mostriamo (per comodità) che è vero per f_1: la dimostrazione per le altre è analoga.
Supponiamo per assurdo che $f_1 \in Span(f_2, ..., f_k)$, allora $\exists \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ tali per cui $f_1 = \lambda_2 f_2 + ... + \lambda_k f_k$. Quest'ultima è un'uguaglianza tra applicazioni lineari (si ricorda che somma di applicazioni lineare è un'applicazione lineare e che prodotto tra uno scalare e un'applicazione lineare è un'applicazione lineare) e questo succede se per ogni elemento dello spazio di partenza le due applicazioni assumono gli stessi valori. Quindi $\forall p \in \mathbb{K}[t]$ polinomio nello spazio di partenza si deve avere che

$$f_1(p) = (\lambda_2 f_2 + ... + \lambda_k f_k)(p) = \lambda_2 f_2(p) + ... + \lambda_k f_k(p)$$

ma avevamo definito f_i come val_{a_i}, dunque

$$val_{a_1}(p) = \lambda_2 val_{a_2}(p) + ... + \lambda_k val_{a_k}(p)$$

ovvero
$$p(a_1) = \lambda_2 p(a_2) + ... + \lambda_k p(a_k)$$
Dal momento che questa uguaglianza deve valere per ogni polinomio a coefficienti in $\mathbb{K}$, possiamo sceglierne alcuni particolarmente vantaggiosi: i polinomi che si annullano in $a_2, ..., a_k$, ovvero i polinomi appartenenti all'ideale generato da $p_0 = (t - a_2)...(t - a_k)$ (scegliamo per semplicità proprio il polinomio p_0). Si deve avere quindi

$$p_0(a_1) = \lambda_2 p_0(a_2) + ... + \lambda_k p_0(a_k) = 0$$

Ma allora anche $p_0(a_1) = 0$. Tuttavia possiamo calcolare esplicitamente $p_0(a_1)$, infatti sappiamo che $p_0 = (t - a_2)...(t - a_k)$: si ha quindi che $p_0(a_1) = (a_1 - a_2)...(a_1 - a_k)$. Ma per ipotesi $a_1, ..., a_k$ sono tutti distinti, quindi $\forall i \in \{2, ..., k\}$, $a_1 - a_i \neq 0$ e dato che $\mathbb{K}$ è un campo, e quindi un dominio, non contiene divisori di zero: $p_0(a_1) \neq 0$, il che è in contraddizione con quanto affermato in precedenza. Dall'assurdo ottenuto, ricaviamo la tesi che volevamo dimostrare: $\forall i\{1, ..., k\}$, $f_i \notin Span(f_1, ..., \cancel{f_i}, ..., f_k)$, che è equivalente a dire che $f_1, ..., f_k$ sono linearmente indipendenti.

Osservazione: In questo esercizio abbiamo dimostrato che un insieme composto da k valutazioni è linearmente indipendente, ma dal momento che k è arbitrario, abbiamo dimostrato molto di più: cioè che l'insieme di tutte le valutazioni è linearmente indipendente (sia per campi finiti che per campi infiniti). Scritto formalmente: $X = \{val_a \in Hom(\mathbb{K}[t], \mathbb{K}) \mid a \in \mathbb{K}\}$ è un insieme linearmente indipendente. In particolare se $\mathbb{K}$ è infinito, anche X lo è: ci troviamo davanti a un insieme infinito linearmente indipendente dentro lo spazio degli omomorfismi tra $\mathbb{K}[t]$ e $\mathbb{K}$. Naturalmente questo insieme NON è finitamente generato, poiché, per quanto visto a lezione, ogni insieme di generatori ha cardinalità maggiore o uguale a ogni insieme linearmente indipendente. Segue da tutto ciò che, in generale, $dimHom(\mathbb{K}[t], \mathbb{K}) \geq |X| = |\mathbb{K}|$.
Se ad esempio $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $Hom(\mathbb{R}[t], \mathbb{R})$ ha dimensione maggiore o uguale della cardinalità di $\mathbb{R}$ che è $\mathfrak{c}$, ovvero la cardinalità del continuo (mentre si ricorda che $dim\mathbb{R}[t] = \aleph_0$). Quindi, lo spazio dei polinomi ha dimensione numerabile, mentre lo spazio degli omomorfismi da $\mathbb{R}[t]$ in $\mathbb{R}$ ha dimensione maggiore (questo schifo prenderà il nome di spazio vettoriale duale, una cosa che deve spaventare, tanto: cit. Manfre: "questi oggetti sono intrattabili").

4.6 Esercizio 6

Sia $S_n \subset M(n, \mathbb{K})$ lo spazio delle matrici simmetriche dentro lo spazio delle matrici quadrate a coefficienti in $\mathbb{K}$ (ricordiamo che $S_n = \{A \in M(n, \mathbb{K}) \mid A^\top = A\}$ o anche $S_n = \{(a_{ij})_{i,j \in \{1,...,n\}} \mid a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j\{1, ..., n\}\}$). Trovare una base di tale spazio vettoriale e la sua dimensione.

Soluzione: Sia $A \in S_n$, scriviamola formalmente con i suoi coefficienti:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & a_{kk} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Notiamo che la parte sotto la diagonale è completamente determinata dalla parte sopra la diagonale (cioè, scelti dei valori per la parte sopra la diagonale, la parte sotto è determinata da questi valori).
Separiamo ora i contributi dei singoli parametri, con un piccolo ragionamento otteniamo che:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & a_{kk} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}E_{11} + a_{22}E_{22} + ... + a_{nn}E_{nn} + a_{12}(E_{12} + E_{21}) + ... + a_{ij}(E_{ij} + E_{ji})$$

con $1 \leq i < j \leq n$ (nella zona sopra la diagonale, l'indice di riga i è minore dell'indice di colonna j). Abbiamo allora trovato un insieme di generatori per S_n: $\{E_{11}, ..., E_{nn}, E_{12} + E_{21}, ..., E_{ij} + E_{ji}\}$ genera S_n.
Vediamo se queste matrici sono linearmente indipendenti: scriviamo una combinazione lineare nulla di questi elementi: $a_{11}E_{11} + a_{22}E_{22} + ... + a_{nn}E_{nn} + a_{12}(E_{12} + E_{21}) + a_{13}(E_{13} + E_{31}) + ... + a_{ij}(E_{ij} + E_{ji}) = 0$, ma questa combinazione è proprio la A di prima:

$$a_{11}E_{11} + a_{22}E_{22} + ... + a_{nn}E_{nn} + a_{12}(E_{12} + E_{21}) + a_{13}(E_{13} + E_{31}) + ... + a_{ij}(E_{ij} + E_{ji}) = A =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & a_{kk} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{11} & 0_{12} & \dots & \dots & 0_{1n} \\ 0_{12} & 0_{22} & \dots & \dots & 0_{2n} \\ \vdots & \ddots & 0_{kk} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{1n} & 0_{2n} & \dots & \dots & 0_{nn} \end{pmatrix}$$

e questo è vero se e solo se tutti i coefficienti sono nulli: $a_{11} = a_{22} = ... = a_{nn} = a_{12} = a_{13} = ...a_{ij} = 0$. Ma allora $\{E_{11}, ..., E_{nn}, E_{12}+E_{21}, ..., E_{ij}+E_{ji}\}$ è anche linearmente indipendente e quindi è una base di S_n.

Adesso che abbiamo trovato una base, conosciamo anche la dimensione di tale spazio vettoriale, che è uguale alla cardinalità di $\{E_{11}, ..., E_{nn}, E_{12} + E_{21}, ..., E_{ij} + E_{ji}\}$. Ma quanti elementi ha questo insieme? Dal momento che questo numero è uguale al numero di elementi sopra la diagonale + il numero di elementi della diagonale, con un piccolo ragionamento si ottiene che tale cardinalità è $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$, ovvero $dim S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

4.7 Esercizio 7

Sia $A_n \subset M(n, \mathbb{K})$ lo spazio delle matrici antisimmetriche dentro lo spazio delle matrici quadrate a coefficienti in $\mathbb{K}$, tale che $char\mathbb{K} \neq 2$ (ricordiamo che $A_n = \{A \in M(n, \mathbb{K}) \,|\, A^\top = -A\}$ o anche $A_n = \{(a_{ij})_{i,j\in\{1,...,n\}} \,|\, a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j\{1, ..., n\}\}$). Trovare una base di tale spazio vettoriale e la sua dimensione.

Soluzione: Sia $A \in A_n$, scriviamola formalmente con i suoi coefficienti:

$$A = \begin{pmatrix} 0_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & 0_{kk} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & \dots & 0_{nn} \end{pmatrix}$$

Notiamo che la parte sotto la diagonale è completamente determinata dalla parte sopra la diagonale (cioè, scelti dei valori per la parte sopra la diagonale, la parte sotto è determinata da questi valori).
Separiamo ora i contributi dei singoli parametri, con un piccolo ragionamento otteniamo che:

$$A = \begin{pmatrix} 0_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & 0_{kk} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & \dots & 0_{nn} \end{pmatrix} = a_{12}(E_{12} - E_{21}) + ... + a_{ij}(E_{ij} - E_{ji})$$

con $1 \leq i < j \leq n$ (nella zona sopra la diagonale, l'indice di riga i è minore dell'indice di colonna j). Abbiamo allora trovato un insieme di generatori per A_n: $\{E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, ..., E_{ij} - E_{ji}\}$ genera A_n.
Vediamo se queste matrici sono linearmente indipendenti: scriviamo una combinazione lineare nulla di questi elementi: $a_{12}(E_{12} - E_{21}) + a_{13}(E_{13} - E_{31}) + ... + a_{ij}(E_{ij} - E_{ji}) = 0$, ma questa combinazione è proprio la A di prima:

$$a_{12}(E_{12} - E_{21}) + a_{13}(E_{13} - E_{31}) + ... + a_{ij}(E_{ij} - E_{ji}) = A =$$

$$= \begin{pmatrix} 0_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & 0_{kk} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & \dots & 0_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{11} & 0_{12} & \dots & \dots & 0_{1n} \\ 0_{12} & 0_{22} & \dots & \dots & 0_{2n} \\ \vdots & \ddots & 0_{kk} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{1n} & 0_{2n} & \dots & \dots & 0_{nn} \end{pmatrix}$$

e questo è vero se e solo se tutti i coefficienti sono nulli: $a_{12} = a_{13} = ...a_{ij} = 0$. Ma allora $\{E_{12} - E_{21}, ..., E_{ij} - E_{ji}\}$ è anche linearmente indipendente e quindi è una base di A_n.

Adesso che abbiamo trovato una base, conosciamo anche la dimensione di tale spazio vettoriale, che è uguale alla cardinalità di $\{E_{12}-E_{21}, ..., E_{ij}-E_{ji}\}$. Ma quanti elementi ha questo insieme? Dal momento che questo numero è uguale al numero di elementi sopra la diagonale, con un piccolo ragionamento si ottiene che tale cardinalità è $1 + 2 + ... + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$, ovvero $dimA_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

4.8 Esercizio 8

Sia $A \in M(m, n, \mathbb{K})$ e sia $L_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ l'applicazione lineare associata ad A (ricordiamo che dato $x \in \mathbb{K}$, $L_A(x) = A \cdot x$). Determina $dimKer(L_A)$.

Soluzione: Sappiamo che il Ker di una generica L_A è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $A \cdot x = 0$, dove, se $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, si ha $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$ (sistema di m equazioni in n incognite). Risolvere il sistema significa ricavare alcune variabili in funzione di altre libere di variare su tutto $\mathbb{K}$. Supponiamo di aver ricavato le prime k variabili, ovvero: $x_1 = f_1(x_{k+1}, ..., x_n)$,...,$x_k = f_k(x_{k+1}, ..., x_n)$ (con ciò si intende dire che abbiamo ricavato x_1 in funzione di $x_{k+1}, ..., x_n$,..., x_k in funzione di $x_{k+1}, ..., x_n$). Prendiamo ora un vettore

$$KerL_A \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_k \\ x_{k+1} \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_{k+1}, ..., x_n) \\ f_2(x_{k+1}, ..., x_n) \\ ... \\ f_k(x_{k+1}, ..., x_n) \\ x_{k+1} \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = x_{k+1}v_{k+1} + ... + x_n v_n$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo suddiviso i vari contributi di $x_{k+1}, ..., x_n$ e i v_l sono vettori di $\mathbb{K}^n$ $\forall l \in \{k+1, ..., n\}$.
$\Longrightarrow KerL_A$ coincide esattamente con lo $Span$ di $v_{k+1}, ..., v_n$.
Ma come sono fatti i v_l? Con un piccolo ragionamento si ottiene

$$v_{k+1} = \begin{pmatrix} *_1 \\ *_2 \\ ... \\ *_k \\ 1_{k+1} \\ 0_{k+2} \\ ... \\ 0_n \end{pmatrix}, \ v_{k+2} = \begin{pmatrix} *_1 \\ *_2 \\ ... \\ *_k \\ 0_{k+1} \\ 1_{k+2} \\ ... \\ 0_n \end{pmatrix}, ..., v_n = \begin{pmatrix} *_1 \\ *_2 \\ ... \\ *_k \\ 0_{k+1} \\ 0_{k+2} \\ ... \\ 1_n \end{pmatrix}$$

dove gli asterischi fino alla k-esima coordinata indicano che non sappiamo che cosa si trova lì: infatti i valori che assumono i v_l fino alla k-esima coordinata dipendono da come è fatta L_A. Notiamo una cosa: i vettori v_l sono costruiti in un modo particolare, ovvero, sotto gli asterischi troviamo, andando da v_{k+1} a v_n, i vettori di una base canonica: sono quindi anche linearmente indipendenti! (Lo si poteva vedere notando anche che una combinazione lineare di $v_{k+1},...,v_n$ è $x_{k+1}v_{k+1}+...+x_nv_n$, che è nulla se tutti i coefficienti del vettore

$$\begin{pmatrix} f_1(x_{k+1},...,x_n) \\ f_2(x_{k+1},...,x_n) \\ ... \\ f_k(x_{k+1},...,x_n) \\ x_{k+1} \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

sono nulli, in particolare se $x_{k+1} = ... = x_n = 0 \implies v_{k+1},...,v_n$ sono linearmente indipendenti).
Siamo giunti alla conclusione che $v_{k+1},...,v_n$ generano e sono linearmente indipendenti: sono allora una base di $KerL_A \implies$ la dimensione di $KerL_A$ è uguale al numero di v_l, ovvero $n-k$: $dimKerL_A = n-k$.

4.9 Esercizio 9

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & -1 \end{pmatrix} \in M(4,\mathbb{R})$ e sia $L_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$. Determinare $dimKerL_A$.

Soluzione: applichiamo direttamente la procedura di sopra:

$$KerL_A = KerA = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ovvero $KerA$ è il luogo delle soluzioni di un sistema lineare in 4 equazioni e 4 incognite:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 & = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 & = 0 \\ 4x_2 - 5x_3 - x_4 & = 0 \end{cases}$$

Notiamo che la terza equazione è uguale alla differenza tra la seconda e la prima, mentre la quarta è la differenza tra due volte la prima e la seconda: esse dunque non contribuiscono alla risoluzione del sistema. Il sistema si riduce così a un sistema di 2 equazioni in 4 incognite:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_4 = -2x_3 + 3x_2 \\ x_1 = 3x_2 - 4x_3 \end{cases}$$

Abbiamo così ricavato il massimo numero di variabili (x_1, x_4) in funzione delle altre variabili libere (x_2, x_3). Ripercorrendo il procedimento dell'Esercizio precedente ci aspettiamo che la dimensione del nucleo sia 2. Rifacciamolo esplicitamente:

$$KerL_A \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_2 - 4x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ -2x_3 + 3x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = x_2v_1 + x_3v_2$$

quindi $KerL_A = Span(v_1, v_2)$. Per di più v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti in quanto una loro combinazione lineare è nulla se e solo se $x_2 = x_3 = 0$ (dato che una loro combinazione lineare è un vettore del tipo $\begin{pmatrix} 3x_2 - 4x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ -2x_3 + 3x_2 \end{pmatrix}$ che, guardando le coordinate centrali, è nullo se e solo se $x_2 = x_3 = 0$). Ma allora v_1, v_2 generano $KerL_A$ e sono linearmente indipendenti $\Longrightarrow$ sono una base di $KerL_A \Longrightarrow dimKerL_A = 2$.

4.10 Esercizio 10

Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$ lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$ e siano $p_1 = x-1$, $p_2 = 2x+1$, $p_3 = 4x-5$, $p_4 = x^2+x+1$, $p_5 = 2x^2+x+1$, $p_6 = -5x^2+3x$ 6 polinomi di V. Sapendo che $dimV = 3$ (visto in classe: una base è $1, x, x^2$), verificare che i 6 vettori generano V ed estrarre una base dall'insieme $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$.

Dimostrazione. Dimostriamo prima che i 6 polinomi generano V. Per farlo dobbiamo mostrare che $Span(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) = V$, ovvero che sussiste una doppia inclusione. Notiamo però che per quanto detto poc'anzi $1, x, x^2$ sono una base di V, ovvero $Span(1, x, x^2) = V$. Dobbiamo dunque mostrare che sussiste una doppia inclusione tra $Span(1, x, x^2)$ e $Span(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$. Per farlo, ricordiamo che se X e Y sono sottoinsiemi di uno spazio vettoriale V, tali per cui $X \subset Span(Y)$, allora $Span(X) \subset Span(Y)$. Dobbiamo quindi far vedere che $1, x, x^2 \in Span(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$ e che $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 \in Span(1, x, x^2)$.

$\cdot \subset$: ovvio, in quanto $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 \in \mathbb{R}_2[x]$ e $1, x, x^2$ sono una base di $\mathbb{R}_2[x]$ e quindi generano tutto lo spazio.

$\cdot \supset$ Mi basta far vedere separatamente che $1, x, x^2 \in Span(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$. Questo è vero, infatti:
$1 = 4p_1 - p_3$
$x = \frac{p_1+p_2}{3}$
$x^2 = p_5 - p_4$.

Abbiamo così dimostrato che i 6 polinomi generano tutto lo spazio. Dalla teoria sapiamo che dato uno spazio vettoriale finitamente generato, da ogni insieme di generatori di tale spazio è possibile estrarre una base. Vogliamo allora estrarre una base da $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ tramite l'algoritmo di estrazione.
Applichiamo l'algoritmo: partiamo dallo stato iniziale $(\emptyset | p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$. Mi chiedo se p_1, che è il primo polinomio che troviamo a destra, sta in $Span(\emptyset)$: la risposta è ovviamente no, in quanto $Span(\emptyset) = \{0\}$ e $p_1 \neq 0$, dunque lo spostiamo a sinistra e procediamo con l'algoritmo.
Sia ora $(p_1 | p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$ il nuovo stato. Mi chiedo se p_2 sta in $Span(p_1)$: se ci stesse allora sarebbe un polinomio del tipo $\alpha p_1 = \alpha(x-1) = \alpha x - \alpha$, quindi un polinomio con coefficiente della x uguale al termine noto, ma dal momento che $p_2 = 2x+1$ ha i due coefficienti diversi, esso non appartiene a $Span(p_1)$, dunque spostiamo anche questo a sinistra e procediamo con l'algoritmo.
Sia ora $(p_1, p_2 | p_3, p_4, p_5, p_6)$ il nuovo stato. Mi chiedo se p_3 sta in $Span(p_1, p_2)$: la risposta è banalmente sì, per due motivi. Il primo motivo è che serve almeno un polinomio di secondo grado per generare $\mathbb{R}_2[x]$ e, poiché $\mathbb{R}_2[x]$ ha dimensione 3 e abbiamo già trovato 2 elementi della base di grado 1, l'ultimo polinomio dovrà necessariamente essere di secondo grado. L'altro motivo è che p_1, p_2 sono linearmente indipendenti e quindi generano $\mathbb{R}_1[x]$ (dato che questo ha dimensione 2, dalla teoria sappiamo che se un suo sottoinsieme linearmente indipendente contiene 2 elementi allora è una base) e $p_3 \in \mathbb{R}_1[x] = Span(p_1, p_2)$. Dunque l'algoritmo scarta p_3 e procede.
Sia ora $(p_1, p_2 | p_4, p_5, p_6)$ il nuovo stato. Mi chiedo se p_4 sta in $Span(p_1, p_2)$: la risposta è banalmente no, in quanto p_4 ha grado 2 e nessuna combinazione lineare di p_1, p_2 potrà mai generare un polinomio di grado 2, dunque spostiamo anche questo a sinistra.
Il nuovo stato è ora fatto come segue: $(p_1, p_2, p_4 | p_5, p_6)$. Sappiamo che $dim\mathbb{R}_2[x] = 3$: ci possiamo fermare, poiché abbiamo trovato 3 polinomi linearmente indipendenti dentro $\mathbb{R}_2[x]$ che sono dunque anche generatori $\Longrightarrow$ sono una base di $\mathbb{R}_2[x]$ (p_5 e p_6 vengono cancellati). La base estratta è così $\{p_1, p_2, p_4\} = \{x-1, 2x+1, x^2+x+1\}$.

Osservazione: se permutiamo i generatori l'algoritmo estrarrà comunque una base, ma a seconda di come i polinomi vengono permutati otterremo basi differenti. Ad esempio, se mettiamo p_6 per primo, essendo questo diverso da 0 l'algoritmo non lo scarta: otteniamo dunque una base che contiene p_6.

Osservazione: l'algoritmo di estrazione funziona solo su insiemi finitamente generati. È vero però che se un insieme è finitamente generato, allora da ogni insieme di generatori, anche infinito, si può estrarre una base. Sia infatti $V \neq \{0\}$ finitamente generato e sia $X \subset V$ un insieme di generatori, anche infinito, allora da X si può estrarre una base di V. Se X è finito infatti applichiamo l'algoritmo come nel caso di sopra. Se X è infinito non posso usare l'algoritmo, però posso costruire una base di V partendo da vettori linearmente indipendenti, piuttosto che da generatori: scegliamo $v_1 \in X$, $v_1 \neq 0$ (è ovviamente linearmente indipendente perché non nullo). Adesso controlliamo: se $V = Span(v_1)$, allora $\{v_1\}$ è base di V. Se invece $Span(v_1) \subsetneqq V$, allora X non può essere tutto contenuto in $Span(v_1)$, perché se lo fosse allora anche $Span(X)$ sarebbe contenuto in $Span(v_1)$, ma $Span(X) = V$ in quanto X genera ($Span(v_1) \subsetneqq V = Span(X) \Longrightarrow X \nsubseteq Span(v_1)$). Quindi $\exists v_2 \in X$ tale che $v_2 \notin Span(v_1)$: allora v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti. Controllando di nuovo: se $V = Span(v_1, v_2)$, allora $\{v_1, v_2\}$ è base di V. Se invece $Span(v_1, v_2) \subsetneqq V$, allora X non può essere tutto contenuto in $Span(v_1, v_2)$ per lo stesso motivo di prima... per cui $\exists v_3 \in X$ tale che $v_3 \notin Span(v_1, v_2)$: allora v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti. Andando avanti così costruiamo una base di V, in quanto essendo esso finitamente generato, con un numero finito di passaggi arriveremo a completare a base l'insieme di vettori linearmente indipendenti.

4.11 Esercizio 11

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e sia $B \subset V$. Dimostra che B è base di $V \Longleftrightarrow B$ è linearmente indipendente e massimale (ovvero non esistono soprainsiemi propri di B linearmente indipendenti).

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare separatamente le due frecce:

$(\Longrightarrow)$: Ovvio in quanto se B è una base allora è un insieme di generatori e per quanto visto a teoria ogni insieme di generatori di un certo spazio ha cardinalità maggiore o uguale alla cardinalità di un qualsiasi insieme linearmente indipendente dello stesso spazio: non possono dunque esistere soprainsiemi di B linearmente indipendenti.

$(\Longleftarrow)$: Per dimostrare che tale insieme è una base ci basta dimostrare che B genera V. Sia allora $v \in V$: se $v \in B$ ho finito in quanto $v \in Span(B)$; se invece $v \notin B$ allora consideriamo l'insieme $B \cup \{v\} \supsetneqq B$: essendo un soprainsieme di B non è linearmente indipendente per ipotesi, ma dato che B è linearmente indipendente per ipotesi, si ha necessariamente che $v \in Span(B)$ (infatti, per quanto visto a teoria: se $X \subset V$ è un insieme linearmente indipendente e $v \in V$, $X \cup \{v\}$ è linearmente indipendente $\Longleftrightarrow v \notin Span(X)$).

4.12 Esercizio 12

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e sia $B \subset V$. Dimostra che B è base di $V \Longleftrightarrow B$ è un insieme di generatori e minimale (ovvero non esistono sottoinsiemi propri di B che generano V).

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare separatamente le due frecce:

$(\Longrightarrow)$: Ovvio in quanto se B è una base allora è un insieme linearmente indipendente e per quanto visto a teoria ogni insieme di generatori di un certo spazio ha cardinalità maggiore o uguale alla cardinalità di un qualsiasi insieme linearmente indipendente dello stesso spazio: non possono dunque esistere sottoinsiemi di B che generano V.

$(\Longleftarrow)$: Per dimostrare che tale insieme è una base ci basta dimostrare che B è linearmente indipendente. Per farlo prendiamo una combinazione lineare nulla di elementi di B: sia allora $f : B \longrightarrow \mathbb{K}$ una funzione a supporto finito. La combinazione nulla è fatta come segue: $0 = v_f = \sum_{v \in B} f(v)v$ vogliamo dimostrare che $f = 0$ (è l'applicazione nulla).
Supponiamo per assurdo che esista $v_0 \in B$ tale per cui $f(v_0) \neq 0$, allora posso esplicitare dalla somma v_0: $v_0 = -\frac{1}{f(v_0)} \sum_{v \in B - \{v_0\}} f(v)v \Longrightarrow v_0 \in Span(B - \{v_0\})$. Ma per quanto visto a teoria se $X \subset V$ e $v \in V$ tale che $v \in X$ allora $Span(X) = Span(X - \{v\})$: nel nostro caso quindi $Span(B) = Span(B - \{v_0\})$, ma per ipotesi $Span(B) = V$, quindi si avrebbe $Span(B - \{v_0\}) = V$, ma ciò è assurdo in quanto $B - \{v_0\} \subset B$ e per ipotesi non esistono sottoinsiemi propri di B che generano V. Quindi $f = 0$, ovvero B è linearmente indipendente.

5 Esercitazione 09-11-2021

5.1 Esercizio 1

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Dimostrare che $v_1, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti $\iff$ $dimSpan(v_1, ..., v_n) = n$.

Dimostrazione. Dimostriamo le due frecce separatamente.

($\Longleftarrow$) Poiché $v_1, ..., v_n$ generano $Span(v_1, ..., v_n)$ e $dimSpan(v_1, ..., v_n) = n$, i vettori $v_1, ..., v_n$ sono una base di $Span(v_1, ..., v_n) = n$ e dunque sono linearmente indipendenti.

($\Longrightarrow$) Poiché $v_1, ..., v_n$ generano $Span(v_1, ..., v_n)$ e sono linearmente indipendenti per ipotesi, essi sono una base di $Span(v_1, ..., v_n)$, che ha dunque dimensione n.

5.2 Esercizio 2

Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare, e siano $v_1, ..., v_n \in V$. Allora $f(v_1), ..., f(v_n)$ sono linearmente indipendenti $\iff$ $v_1, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti e $Kerf$ e $Span(v_1, ..., v_n)$ sono in somma diretta.

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) Siano $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$. Sia $a_1v_1 + ... + a_nv_n = 0$ una combinazione lineare nulla di $v_1, ..., v_n$, voglio far vedere che necessariamente $a_1 = ... = a_n = 0$. So che $0 = f(0) = f(a_1v_1+...+a_nv_n) = a_1f(v_1)+...+a_nf(v_n)$,ma dato che per ipotesi $f(v_1), ..., f(v_n)$ sono linearmente indipendenti, si ha che $a_1 = ... = a_n = 0$, e dunque anche $v_1, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti.
Per far vedere invece che la somma è diretta, sia $v \in Kerf \cap Span(v_1, ..., v_n)$, allora $\exists a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$ t.c. $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$ (in quanto $v \in Span(v_1, ..., v_n)$). Applicando f a tale v si ottiene $f(v) = a_1f(v_1) + ... + a_nf(v_n) = 0$ (in quanto $v \in Kerf$). Ma allora abbiamo una combinazione lineare nulla di $f(v_1), ..., f(v_n)$, che sono linearmente indipendenti per ipotesi, dunque $a_1 = ... = a_n = 0$, e $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n = 0$. Questo dimostra che $Kerf$ e $Span(v_1, ..., v_n)$ sono in somma diretta ($Kerf \cap Span(v_1, ..., v_n) = \{0\}$).

($\Longleftarrow$) Sia $0 = a_1f(v_1) + ... + a_nf(v_n) = f(a_1v_1 + ... + a_nv_n)$ una combinazione lineare nulla di $f(v_1), ..., f(v_n)$, con $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$. Allora $a_1v_1 + ... + a_nv_n \in Kerf \cap Span(v_1, ..., v_n)$ (in quanto è combinazione lineare di $v_1, ..., v_n$ e quando valuto con f dà come risultato 0, quindi $\in Kerf$), ma per ipotesi tale intersezione contiene solo $\{0\} \Rightarrow a_1v_1 + ... + a_nv_n = 0$, ma sempre per ipotesi $v_1, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti, quindi $a_1 = ... = a_n = 0$, da cui segue che anche $f(v_1), ..., f(v_n)$ sono linearmente indipendenti.

5.3 Esercizio 3

Sia $V = S_3 \subset M(3, \mathbb{R})$ e sia

$$X = \left\{ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Si completi tale insieme a base di V.
Procedimento: Poiché sappiamo dalla teoria che S_3 è un sottospazio vettoriale di dimensione 6, dobbiamo aggiungere a X almeno 3 matrici che non appartengono allo Span delle precedenti.
Verifichiamo prima che A, B e C siano linearmente indipendenti: siano dunque $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e sia $\alpha A+\beta B+\gamma C = 0$ una combinazione lineare nulla di elementi di X. Vogliamo dimostrare che α, β, γ sono tutti nulli. Descriviamo la matrice ottenuta da tale combinazione lineare:

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = \begin{pmatrix} -\alpha + 2\beta - \gamma & \alpha - \beta & 2\gamma \\ \alpha - \beta & -2\alpha + 4\beta + \gamma & \alpha - \beta \\ 2\gamma & \alpha - \beta & -\alpha + 2\beta - \gamma \end{pmatrix}$$

Tale matrice è uguale alla matrice nulla se e solo se tutti i coefficienti della matrice sono uguali a zero. Dal coefficiente in riga 3 e colonna 1 otteniamo $2\gamma = 0$, che implica $\gamma = 0$, mentre dai coefficienti in riga 1 e colonna 1 e in riga 1 e colonna 2 otteniamo $-\alpha + 2\beta = 0$

e $\alpha - \beta = 0 \iff \alpha = \beta = 0$. Quindi tutti i coefficienti sono nulli e le tre matrici sono linearmente indipendenti. Cerchiamo ora di costruire una matrice D simmetrica che non appartenga a $Span(A, B, C)$. Notiamo che per ogni matrice appartenente a $Span(A, B, C)$, il coefficiente $a_{12} = a_{23}$: affinché dunque D non appartenga a tale Span, essa deve avere i coefficienti a_{12} e a_{23} distinti. Un esempio di matrice che rispetta tale proprietà è

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Adesso dobbiamo procedere come prima, costruendo una matrice E non appartenente a $Span(A, B, C, D)$. Descriviamo innanzitutto come è fatto $Span(A, B, C, D)$, descrivendo una qualsiasi combinazione lineare di queste 4 matrici: sia dunque $\delta \in \mathbb{R}$, la combinazione $\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$ è fatta come segue:

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = \begin{pmatrix} -\alpha + 2\beta - \gamma & \alpha - \beta + \delta & 2\gamma \\ \alpha - \beta + \delta & -2\alpha + 4\beta + \gamma & \alpha - \beta + 2\delta \\ 2\gamma & \alpha - \beta + 2\delta & -\alpha + 2\beta - \gamma \end{pmatrix}$$

Trovare una matrice non appartenente a $Span(A, B, C, D)$ significa cercare una matrice che non rispetti almeno una di quelle condizioni. In particolare notiamo che per ogni matrice appartenente a $Span(A, B, C, D)$, il coefficiente a_{11} e il coefficiente a_{33} sono uguali: basta dunque cercare una matrice simmetrica che abbia quei due coefficienti diversi! Un esempio di tale matrice è la seguente:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Per finire di completare a base X ci basta trovare un'ultima matrice F, simmetrica e non appartenente a $Span(A, B, C, D, E)$: difatti, così facendo, avremo 6 matrici linearmente indipendenti, e avremo trovato una base di S_3 (in quanto se V è uno spazio vettoriale di dimensione n e in V trovo n vettori linearmente indipendenti, allora essi sono una base di V). Procediamo cercando l'ultima matrice.
Descriviamo come prima l'insieme $Span(A, B, C, D, E)$: sia allora $\epsilon \in \mathbb{R}$ un quinto coefficiente. Consideriamo una qualsiasi combinazione lineare di A, B, C, D, E, essa sarà fatta come segue:

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D + \epsilon E = \begin{pmatrix} -\alpha + 2\beta - \gamma + \epsilon & \alpha - \beta + \delta & 2\gamma \\ \alpha - \beta + \delta & -2\alpha + 4\beta + \gamma & \alpha - \beta + 2\delta \\ 2\gamma & \alpha - \beta + 2\delta & -\alpha + 2\beta - \gamma - \epsilon \end{pmatrix}$$

In questo caso trovare una relazione tra i coefficienti sembra più difficile: tentiamo di costruirla noi! Notiamo che l'elemento di posto a_{11} sommato all'elemento di posto a_{33} dà come risultato $-2\alpha + 4\beta - 2\gamma$, che non è niente di meno che la differenza tra l'elemento di posto a_{21} e i $\frac{3}{2}$ dell'elemento di posto a_{13}. Ma allora abbiamo trovato una relazione tra i coefficienti delle matrici contenute in $Span(A, B, C, D, E)$: se riusciamo a costruire una matrice tale per cui $a_{11} + a_{33} \neq a_{21} - \frac{3}{2}a_{13}$ abbiamo vinto. Una matrice di questo genere è ad esempio:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Siamo dunque riusciti a completare l'insieme X a base e il risultato finale è dato dall'insieme $\{A, B, C, D, E, F\}$.
N.B. Alle volte completare a caso (più verifica diretta) è molto più efficiente! È raro che scegliendo a caso una matrice la si ottenga appartenente allo Span delle precedenti (e se succede, hai tanta tanta sfiga).

5.4 Esercizio 4

Sia $tr : M(2, 3, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione traccia e sia $V = Ker(tr)$ ($dimV = 5$ in quanto per la formula delle dimensioni abbiamo che $dimM(2, 3, \mathbb{R}) = dimIm(tr) + dimKer(tr)$, l'immagine della traccia ha dimensione 1, in quanto la traccia è un omomorfismo surgettivo, la cui immagine è $\mathbb{R}$ (che ha dimensione 1 su $\mathbb{R}$), e la dimensione di $M(2,3,\mathbb{R})$ è 6). Sia inoltre $X \subset V$ formato da:

$$X = \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Completare X a base di V.
Procedimento: Come prima: verifichiamo innanzitutto che le tre matrici sono linearmente indipendenti. Siano allora $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e sia $\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$ una combinazione lineare nulla di elementi di X. Vogliamo dimostrare che α, β, γ sono tutti nulli. Descriviamo la matrice ottenuta da tale combinazione lineare:

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta & \alpha + \beta - \gamma & \beta - 2\gamma \\ 2\alpha - \gamma & -\alpha - 2\beta & \alpha + \beta - 2\gamma \end{pmatrix}$$

Con semplici passaggi algebrici si vede che $\alpha = \beta = \gamma = 0$, che dimostra l'indipendenza lineare delle tre matrici. Tentiamo ora di completare a base scegliendo due matrici di taglia 2×3 a traccia nulla completamente a caso. Siano D, E le due matrici:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 13 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo l'indipendenza lineare delle 5 matrici: siano allora $\delta, \epsilon \in \mathbb{R}$ e sia
$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D + \epsilon E = 0$ una combinazione lineare nulla di A, B, C, D, E. La matrice definita dalla combinazione lineare è

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D + \epsilon E = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + 2\delta + 5\epsilon & \alpha + \beta - \gamma + 3\delta & \beta - 2\gamma + 13\epsilon \\ 2\alpha - \gamma + 2\epsilon & -\alpha - 2\beta - 2\delta - 5\epsilon & \alpha + \beta - 2\gamma + \delta \end{pmatrix}$$

Tale matrice è uguale alla matrice nulla se e solo se ogni elemento in una qualsivoglia posizione è 0. Con semplici passaggi algebrici si verifica che $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \epsilon = 0$, che dimostra l'indipendenza lineare delle 5 matrici e che ci assicura dunque che $\{A, B, C, D, E\}$ è una base di V.

5.5 Esercizio 5, anche detto "l'esercizio infinito"

Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $f = L_A$, dove $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Dimostra che:
i) $\exists!\ U$ sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 f-invariante.
ii) $\exists!\ W$ sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 f-invariante.
Definizione: Un sottospazio U di uno spazio vettoriale V si dice f-invariante rispetto ad un omomorfismo di spazi vettoriali $f : V \longrightarrow W$, con W un altro spazio vettoriale, se $f(U) \subset U$.

Dimostrazione. i) Questa è una dimostrazione di esistenza e unicità, quindi dovremo in un primo momento mostrare l'esistenza di tale sottospazio fornendo un esempio e successivamente affermare che esso è unico. Sia allora $U \subset \mathbb{R}^3$ un sottospazio di dimensione 1 f-invariante. Allora $\exists\ 0 \neq u_0 \in \mathbb{R}^3$ tale per cui $U = Span(u_0)$.
Dunque $f(U) = f(Span(u_0)) = Span(f(u_0))$ per la linearità di f, ma per f-invarianza $f(U) \subset U$, e quindi $Span(f(u_0)) \subset U$. Per quanto visto a teoria se X e Y sono sottoinsiemi di uno spazio vettoriale V allora $SpanX \subset Y \iff X \subset Y$. Quindi $f(u_0) \in U$ ma visto che U è generato da u_0, questo succede $\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale per cui $f(u_0) = \lambda u_0 \iff f(u_0) - \lambda u_0 = 0$. Notiamo che possiamo riscrivere l'ultima uguaglianza nel seguente modo: $(f - \lambda id_{\mathbb{R}^3})(u_0)$ (stiamo cioè valutando la funzione $f - \lambda id_{\mathbb{R}^3}$ nel vettore u_0). Ma allora questo implica che $u_0 \in Ker(f - \lambda id_{\mathbb{R}^3})$.
Poiché sia f che $id_{\mathbb{R}^3}$ sono applicazioni lineari, anche la loro differenza lo è, e quindi, come ogni applicazione lineare, è rappresentabile tramite una matrice (ovvero $f - \lambda id_{\mathbb{R}^3} = L_{A-\lambda I_3}$), che è esplicitamente $A - \lambda I_3$, dove $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Trovare $ker(f - \lambda id_{\mathbb{R}^3})$ è equivalente a trovare le soluzioni di $(A - \lambda I_3)X = 0$, dove

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.
Descriviamo dunque la matrice $A - \lambda I_3$:

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Tale matrice, se moltiplicata per un vettore $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e uguagliata al vettore nullo, dà origine al seguente sistema:

$$\begin{cases} (2-\lambda)x + y + z &= 0 \\ (-2-\lambda)y &= 0 \\ -x + y + (2-\lambda)z &= 0 \end{cases}$$

del quale vogliamo trovare le soluzioni. Notiamo che nella seconda equazione abbiamo un prodotto uguale a 0. Poiché il prodotto è tra elementi di $\mathbb{R}$ (che è un campo e quindi un dominio) vale la legge di annullamento del prodotto: ci troviamo davanti a due casistiche da affrontare:

1) $\lambda = -2$

$$\begin{cases} 4x + y + z &= 0 \\ -x + y + 4z &= 0 \end{cases}$$

risolvendo questo sistema si scopre che ha per soluzione tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ del tipo:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}z \\ -\frac{17}{5}z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{17}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ovvero: $Ker(f + 2id_{\mathbb{R}^3}) = Span \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{17}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ che è il sottospazio che stavamo cercando all'inizio:
$U = Span \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{17}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $y = 0$

$$\begin{cases} (2-\lambda)x + z &= 0 \\ -x + (2-\lambda)z &= 0 \end{cases}$$

Cercando di risolvere questo sistema otteniamo $(1 + (2-\lambda)^2)x = 0$, che è soddisfatta solo per $x = 0$ in quanto il coefficiente è sempre positivo. Ma allora anche $z = 0$ e l'unica soluzione di questo sistema è il vettore nullo. Ovviamente non esiste nessun U sottospazio di dimensione 1 e f-invariante che sia generato dal vettore nullo, quindi questo secondo caso non ci dà soluzioni. Abbiamo così anche dimostrato l'unicità di tale sottospazio (quello generato se $\lambda = -2$), richiesta nella tesi.

Osservazione: Se $\lambda \neq -2$ allora $f - \lambda id_{\mathbb{R}^3}$ è un isomorfismo, in quanto abbiamo appena dimostrato che $Ker(f - \lambda id_{\mathbb{R}^3}) = \{0\}$ (quindi l'applicazione è iniettiva) e per la formula delle dimensioni $dim Im(f - \lambda id_{\mathbb{R}^3}) = dim\mathbb{R}^3 = 3$, ma poiché lo spazio d'arrivo ha la stessa dimensione dell'immagine, questi si eguagliano e l'applicazione risulta anche surgettiva.

Dimostrazione. ii)
Osservazione: Siano $f, g : V \longrightarrow W$ due applicazioni lineari che commutano, cioè tali per cui $f \circ g = g \circ f$; allora $Kerg$ e Img sono f-invarianti. Difatti se $v \in Kerg$ allora

$g(f(v)) = f(g(v)) = f(0) = 0 \implies f(v) \in kerg \implies f(Kerg) \subset Kerg$. Se invece $w \in Img$, allora $\exists v \in V$ tale per cui $g(v) = w$, ma allora:

$$f(w) = f(g(v)) = g(f(v)) \in Img \implies f(Img) \subset Img$$

Nel nostro caso abbiamo che $g = f - \lambda id_{\mathbb{R}^3}$ commuta con f, difatti $f(f - \lambda id_{\mathbb{R}^3}) = f^2 - \lambda f(id_{\mathbb{R}^3}) = f^2 - \lambda f = (f - \lambda id_{\mathbb{R}^3})f$. Dunque, per l'osservazione precedente $Ker(f - \lambda id_{\mathbb{R}^3})$ e $Im(f - \lambda id_{\mathbb{R}^3})$ sono f-invarianti. Se quindi $\lambda = -2$ $Im(f + 2id_{\mathbb{R}^3})$ è f-invariante (In generale $id_V, f, f^2, f^3, ...$ commutano con f come pure tutte le loro combinazioni lineari). Ecco che $Im(f + 2id_{\mathbb{R}^3}) = C(A + 2I_3) = Span(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix})$, ma $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ è linearmente dipendente con $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ovvero appartiene al loro *Span*: la combinazione lineare che genera $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ è $-\frac{3}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{17}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (che ha senso in effetti, dato che abbiamo visto che il nucleo ha dimensione 1: l'immagine non avrebbe potuto avere dimensione 3 per la formula delle dimensioni di nucleo e immagine!). Sia dunque $W = Span(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$: W ha dimensione 2 ed è f-invariante per l'osservazione di prima (ovvero è l'immagine di un'applicazione che commuta con f). In più si dimostra facilmente con inclusione e uguaglianza dimensionale che $Span(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = Span(e_1, e_3)$ (infatti è ovvia l'inclusione $\subset$ e i due sottospazi hanno la stessa dimensione). Abbiamo dunque trovato un sottospazio di dimensione 2 f-invariante!

Dimostriamo ora l'unicità di tale sottospazio W: supponiamo che esista un altro sottospazio $W_1 \subset \mathbb{R}^3$ di dimensione 2, f-invariante e $W_1 \neq W$. Dal momento che i due sottospazi sono f-invarianti, anche la loro intersezione è f-invariante, difatti $f(W) \subset W$, $f(W_1) \subset W_1 \implies f(W_1 \cap W) \subset W_1 \cap W$. (L'idea per la risoluzione dell'esercizio è in primo luogo chiedersi come è fatta questa intersezione, producendo poi un assurdo: W_1 e W sono due piani diversi di $\mathbb{R}^3$ che passano per l'origine: l'intersezione è dunque una retta, per di più f-invariante... Ma per il punto $i)$ sappiamo che esiste un'unica retta f-invariante, ovvero U... ma andiamo per gradi...).

Dimostriamo che effettivamente la dimensione di $W_1 \cap W$ è 1: Le possibili dimensioni che tale intersezione può avere sono 3: 0,1,2.

Se l'intersezione avesse dimensione 2 allora $W \supset W_1 \cap W \subset W_1$ e per uguaglianza dimensionale $W = W_1$, ma ciò è assurdo per ipotesi.

Se invece avesse dimensione 0, poiché esiste un unico sottospazio di dimensione 0, si avrebbe: $dimW_1 \cap W = 0 \iff W_1 \cap W = \{0\}$. Siano allora $w_1, w_2 \in W$ e $z_1, z_2 \in W_1$ due basi rispettivamente di W e di W_1; consideriamo allora i 4 vettori w_1, w_2, z_1, z_2: dimostriamo che sotto l'ipotesi $dimW_1 \cap W = 0$ essi sono linearmente indipendenti (che è assurdo in quanto sono 4 vettori di $\mathbb{R}^3$). Siano allora $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ e consideriamo la combinazione lineare nulla $\alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma z_1 + \delta z_2 = 0$: riscrivendola come $\alpha w_1 + \beta w_2 = -\gamma z_1 - \delta z_2$ otteniamo che a sinistra c'è un elemento di W e a destra un elemento di W_1, allora sia $\alpha w_1 + \beta w_2$ che $-\gamma z_1 - \delta z_2$ appartengono a $W_1 \cap W$, che è il solo $\{0\}$ per ipotesi, quindi $\alpha w_1 + \beta w_2 = 0$ e $-\gamma z_1 - \delta z_2 = 0$, ma w_1 e w_2 sono linearmente indipendenti in quanto sono una base di W, dunque necessariamente $\alpha = \beta = 0$ (stesso ragionamento per ottenere che $\gamma = \delta = 0$). Abbiamo così che l'unica combinazione lineare nulla di w_1, w_2, z_1, z_2 è quella con coefficienti tutti uguali a 0, che ci porta a dire che w_1, w_2, z_1, z_2 sono linearmente indipendenti, il che è assurdo in quanto sono 4 vettori di $\mathbb{R}^3$.

Siamo dunque giunti alla conclusione che $dimW_1 \cap W = 1 \implies$ l'intersezione tra W e W_1 è una retta f-invariante di $\mathbb{R}^3$. Ma come avevamo già visto, l'unica retta f-invariante è il sottospazio U del punto $i) \implies W_1 \cap W = U$, ma ciò è assurdo in quanto $U = Span\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{17}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ e il vettore $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{17}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \notin W$ poiché $W = Span(e_1, e_3)$ e ogni vettore appartenente a questo

Span ha la seconda coordinata nulla. Quindi non può esistere un altro sottospazio $W_1 \subset \mathbb{R}^3$ di dimensione 2 e f-invariante: ecco dimostrata l'unicità di W.

6 Esercitazione 12-11-2021

6.1 Esercizio 1

Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $f = L_A$, dove $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ la stessa applicazione dell'esercizio 5 dell'Esercitazione precedente. Calcolare $dimCentr(f)$ (vedi sotto per definizione).

Soluzione: osserviamo innanzitutto una cosa fondamentale: siano $U = Span\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{17}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ e $W = Span(e_1, e_3)$ i due sottospazi dell'esercizio 5 dell'Esercitazione precedente. È vero che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ in quanto l'intersezione tra U e W è banalmente $\{0\}$, dato che in $W = Span(e_1, e_3)$ tutti i vettori hanno la seconda coordinata nulla e in $Span\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{17}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ l'unico vettore che ha la seconda coordinata nulla è $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; inoltre, per definizione, $U + W = Span(U \cup W) = Span(Span(e_1, e_3) \cup Span(\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{17}{5} \\ 1 \end{pmatrix})) = Span(e_1, e_3, \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{17}{5} \\ 1 \end{pmatrix})$: dato che $e_1, e_3, \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{17}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti (e_1 è non nullo, $e_2 \notin Span(e_1)$ e $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{17}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \notin Span(e_1, e_2)$) essi formano una base di $\mathbb{R}^3$ in quanto sono tanti quanto è la dimensione di $\mathbb{R}^3$.

Definizione: Sia $f \in End(V)$, il centralizzatore di f è:

$$Centr(f) = \{g \in End(V) \mid f \circ g = g \circ f\}$$

Inoltre $Centr(f)$ è un sottospazio vettoriale di $End(V)$, infatti:
· L'applicazione nulla gli appartiene in quanto $0 \circ f = f \circ 0 = 0$.
· Se $h, g \in Centr(f)$, allora $h \circ f = f \circ h$ e $g \circ f = f \circ g$. Ma allora $(g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f = f \circ g + f \circ h = f \circ (g + h)$: quindi $Centr(f)$ è chiuso per somma interna.
· Siano $\lambda \in \mathbb{K}$ e $g \in Centr(f)$, allora $g \circ f = f \circ g$. Ma allora $(\lambda g) \circ f = \lambda g \circ f = \lambda f \circ g = f \circ (\lambda g)$ (dove questo ultimo passaggio è giustificato dal fatto che f sia omogenea in quanto applicazione lineare): quindi $Centr(f)$ è chiuso per prodotto per scalari.
Abbiamo così dimostrato che $Centr(f)$ è un sottospazio vettoriale.

In generale trovare la dimensione del centralizzatore non è una cosa semplice: quando verrà affrontata la forma canonica di Jordan le cose si semplificheranno. Ma in questo caso specifico qualcosa possiamo dirlo :). Mostriamo prima di tutto una cosa importante in generale: visto che id_V e i multipli di id_V commutano naturalmente con ogni $f \in End(V)$ si ha che $Centr(id_V) = Centr(\lambda id_V) = End(V)$ (questa cosa non è utile ai fini dell'esercizio, ma è comunque una nota interessante che è bene avere in mente).

Consideriamo ora (ancora in generale) il caso in cui V abbia dimensione finita (sia essa n). Allora, per quanto visto a teoria, fissata una base $B \subset V$, esiste un isomorfismo $M_B^B : End(V) \longrightarrow M(n, \mathbb{K})$ che associa all'endomorfismo g la sua matrice associata $M_B^B(g)$ nelle basi B di partenza e B di arrivo. Per di più, si è visto ancora a teoria che se scegliamo la stessa base sia in partenza che in arrivo, l'isomorfismo non è solo di spazi vettoriali, ma lo è anche di anelli (rispetta allora anche il prodotto): se alla relazione di commutazione che definisce il centralizzatore di f (che coinvolge delle composizioni) applichiamo l'isomorfismo (non è ambiguo, stiamo applicando un isomorfismo a un sottospazio), giungeremo ad un sottospazio che coinvolgerà i prodotti tra matrici: in altre parole, se passiamo alle matrici associate agli endomorfismi, non avremo più una relazione di commutazione dettata dall'operazione di composizione, ma all'operazione di prodotto.
Sia allora $A \in M(3, \mathbb{R})$ la matrice associata alla nostra f: se applichiamo l'isomorfismo M_B^B (dove in questo caso $B = Can_{\mathbb{R}^3}$) a $Centr(f)$ otteniamo $Centr(A) = \{B \in M(3, \mathbb{R}) \mid B \cdot A =$

$A \cdot B\}$ (che continua a essere un sottospazio di $M(3, \mathbb{R})$). Sappiamo dalla teoria che se tra due spazi vettoriali esiste un isomorfismo, allora essi hanno la stessa dimensione: trovare la dimensione di $Centr(f)$ si riduce quindi a trovare la dimensione di $Centr(A)$ (perché si è fatto tutto questo casino? Perché lavorare sullo spazio delle matrici è molto più facile che lavorare sullo spazio degli endomorfismi!).
Cerchiamo di capire ora quali matrici appartengono a $Centr(A)$: sicuramente gli appartengono $I_3, A, A^2, ..., A^k, ...,\ k \in \mathbb{N}$, ma abbiamo dimostrato che il centralizzatore è un sottospazio, dunque anche ogni loro combinazione lineare appartiene a $Centr(A)$, ovvero $Span(I_3, A, A^2, ..., A^k, ...) \subset Centr(A)$ (tradizionalmente $Span(I_3, A, A^2, ..., A^k, ...)$ si rappresenta con il simbolo $\mathbb{K}[A]$, perché una loro combinazione lineare sembra quasi un polinomio). Notiamo che l'insieme di generatori dello $Span$ è infinito, però $Centr(A)$ è finitamente generato, in quanto sottospazio di $M(3, \mathbb{R})$, e quindi anche $Span(I_3, A, A^2, ..., A^k, ...) = \mathbb{K}[A]$ è finitamente generato: è possibile quindi estrarre una base di $\mathbb{K}[A]$ da $I_3, A, A^2, ..., A^k, ...$ (rivedere Esercizio 10, Esercitazione del 04-11-2021).
Esplicitamente abbiamo che

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e sappiamo che $Centr(A) \supset \mathbb{K}[A]$: vogliamo estrarre una base di questo sottospazio da $I_3, A, A^2, ..., A^k, ...$ Ci chiediamo allora che matrici contiene $\mathbb{K}[A]$: sicuramente $\mathbb{K}[A]$ contiene I_3, A, A^2. Dobbiamo allora esplicitamente trovare A^2:

$$A^2 = a \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot (-1) & 0 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot 2 \\ -1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) & -1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Notiamo ora che $I_3 \neq 0$ e $A \notin Span(I_3)$ (basta notare che fuori dalla diagonale non ha tutti zeri): sicuramente I_3 e A sono due matrici linearmente indipendenti. Ci chiediamo ora se I_3, A, A^2 sono linearmente indipendenti, ovvero vogliamo verificare se $A^2 \notin Span(I_3, A)$. Prendiamo allora una combinazione lineare di I_3 e A: siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e sia $\alpha I_3 + \beta A$ la combinazione di sopra: descriviamola formalmente con i coefficienti:

$$\alpha I_3 + \beta A = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta & \beta & \beta \\ 0 & \alpha - 2\beta & 0 \\ -\beta & \beta & \alpha + 2\beta \end{pmatrix}$$

notiamo che il coefficiente di posto a_{12} e il coefficiente di posto a_{13} sono uguali: condizione necessaria di appartenenza a $Span(I_3, A)$ è dunque che $a_{12} = a_{13}$. Vediamo subito allora che $A^2 \notin Span(I_3, A)$ in quanto quei due coefficienti sono diversi (in particolare $a_{12} = 1$ e $a_{13} = 4$). Ne segue che I_3, A, A^2 sono linearmente indipendenti. Andiamo avanti: sicuramente $\mathbb{K}[t]$ contiene anche A^3, definiamolo allora esplicitamente:

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) & 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \\ 0 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) & 0 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \\ -4 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot (-1) & -4 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 1 & -4 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 11 \\ 0 & -8 & 0 \\ -11 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ci chiediamo ora se I_3, A, A^2, A^3 sono linearmente indipendenti, ovvero vogliamo verificare se $A^3 \notin Span(I_3, A, A^2)$. Prendiamo allora una combinazione lineare di I_3, A e A^2: siano $\alpha, \beta\, \gamma \in \mathbb{R}$ e sia $\alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2$ la combinazione di sopra: descriviamola formalmente con i coefficienti:

$$\alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha+2\beta+3\gamma & \beta+\gamma & \beta+4\gamma \\ 0 & \alpha-2\beta+4\gamma & 0 \\ -\beta-4\gamma & \beta-\gamma & \alpha+2\beta+3\gamma \end{pmatrix}$$

Poniamo ora i coefficienti di questa matrice uguali ai coefficienti di A^3: si origina un sistema lineare di 9 equazioni in 3 incognite:

$$\begin{cases} \alpha+2\beta+3\gamma = 2 \\ \beta+\gamma = 5 \\ \beta+4\gamma = 11 \\ 0 = 0 \\ \alpha-2\beta+4\gamma = -8 \\ 0 = 0 \\ -\beta-4\gamma = -11 \\ \beta-\gamma = 1 \\ \alpha+2\beta+3\gamma = 2 \end{cases}$$

Magia delle magie: questo sistema ammette soluzione! Con semplici passaggi algebrici arriviamo infatti alla soluzione $\alpha = -10$, $\beta = 3$ e $\gamma = 2$. Ma allora $A^3 \in Span(I_3, A, A^2)$ e quindi I_3, A, A^2, A^3 sono linearmente dipendenti: la combinazione lineare che genera A^3 è $A^3 = -10I_3 + 3A + 2A^2$. Andando avanti ci troviamo ad affrontare il caso A^4: dovremmo esplicitare la matrice e verificare successivamente se essa appartiene o meno a $Span(I_3, A, A^2)$... ma è davvero utile? Non possiamo dire nulla su A^4? Sì, possiamo. Sappiamo infatti che $A^4 = A^3 \cdot A$, ma abbiamo detto prima che $A^3 = -10I_3 + 3A + 2A^2$, dunque $A^4 = (-10I_3 + 3A + 2A^2) \cdot A = -10A + 3A^2 + 2A^3 = -10A + 3A^2 + 2(-10I_3 + 3A + 2A^2) = -20I_3 - 4A + 7A^2$. Dunque anche $A^4 \in Span(I_3, A, A^2)$. Con lo stesso ragionamento si dimostra per induzione che $\forall n \geq 3$ $A^n \in Span(I_3, A, A^2)$. Ma abbiamo quindi trovato una base di $\mathbb{K}[A]$: infatti $\mathbb{K}[A]$ è generato da tutte le potenze di A, ma abbiamo dimostrato che tutte le potenze di A sono generate da $I_3, A, A^2 \implies \mathbb{K}[A]$ è generato da I_3, A, A^2. Per di più I_3, A, A^2 sono linearmente indipendenti: essi formano una base di $\mathbb{K}[A]$. Quindi $dim\mathbb{K}[A] = 3$. Ma sapevamo che $\mathbb{K}[A] \subset Centr(A) \implies dimCentr(A) \geq 3$ perché contiene un sottospazio di dimensione 3.

Cerchiamo ora di capire come è fatta una matrice di $B \in Centr(A)$: ricordiamo che ciò significa che $B \cdot A = A \cdot B$. Ma allora anche le applicazioni lineari associate a A e B, ovvero $L_A \circ L_B = L_B \circ L_A$ (ricordiamo che il passaggio da matrice ad applicazione è un isomorfismo di anelli: si conservano le operazioni!). Avevamo visto nell'Esercizio 5 della scorsa esercitazione (osservazione di dimostrazione *ii*)) che se due applicazioni lineari commutano allora il nucleo e l'immagine dell'una sono invarianti rispetto all'altra.

Nel nostro caso particolare B commuta con A, ma commuta anche con I_3 (sempre) $\implies B$ commuta con tutte le matrici del tipo $A - \lambda I_3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ peer le proprietà di gruppo (più in generale $Span(I_3, A) \subset Centr(B)$): perché ci interessa? Perché per quanto visto nell'Esercizio 5 della scorsa esercitazione, U era il nucleo di una matrice del tipo $A - \lambda I_3$ (con $\lambda = -2$) e W era l'immagine di una matrice del tipo $A - \lambda I_3$ (ancora con $\lambda = -2$): $U = Ker(A + 2I_3)$ e $W = Im(A + 2I_3)$. Per quanto detto poc'anzi U e W sono L_B-invarianti (perché sono il nucleo e l'immagine di L_A che commuta con L_B). Vogliamo ora tentare di dare una forma più esplicita della matrice B.

Per esempio: possiamo capire come è fatta la prima colonna $B^1 = B \cdot e_1 = L_B(e_1)$: $e_1 \in W = Span(e_1, e_3)$ e poiché W è L_B-invariante, $L_B(e_1) \in W$ per definizione, ovvero $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $L_B(e_1) = B \cdot e_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$. La stessa cosa la possiamo fare con $B^3 = B \cdot e_3 = L_B(e_3)$: $e_3 \in W = Span(e_1, e_3)$ e poiché W è L_B-invariante, $L_B(e_3) \in W$ per definizione, ovvero $\exists\, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tali che $L_B(e_3) = B \cdot e_3 = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ \delta \end{pmatrix}$. Possiamo dunque iniziare a scrivere la matrice B in coefficienti:

$$\begin{pmatrix} \alpha & * & \gamma \\ 0 & * & 0 \\ \beta & * & \delta \end{pmatrix}$$

dove la seconda colonna è ancora un punto di domanda. Notiamo che la matrice B ha due zeri dove li aveva anche la matrice A.

Ragionando anche U è L_B-invariante: chiamando $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{17}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = u_0$ possiamo avere un'informazione su quanto vale $L_B(u_0) = B \cdot u_0$: poiché se applichiamo L_B a un vettore di U rimaniamo dentro U e $U = Span(u_0)$, necessariamente $B \cdot u_0 \in Span(u_0)$, ovvero $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ tale per cui $B \cdot u_0 = \lambda u_0$.

Torniamo alla colonna centrale... Sappiamo che essa è, per la teoria, $B \cdot e_2 = L_B(e_2)$, tuttavia avevamo dimostrato all'inizio che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W \implies$ esiste una combinazione lineare di u_0, e_1, e_3 che genera e_2! In particolare la combinazione cercata è

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{17} e_1 - \frac{5}{17} u_0 + \frac{5}{17} e_3$$

Ma allora sappiamo scrivere $B \cdot e_2$ in funzione di prodotti noti:

$$B \cdot e_2 = B \cdot (\frac{3}{17} e_1 - \frac{5}{17} u_0 + \frac{5}{17} e_3) = \frac{3}{17} B \cdot e_1 - \frac{5}{17} B \cdot u_0 + \frac{5}{17} B \cdot e_3$$

che esplicitamente è

$$B \cdot e_2 = \frac{3}{17} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} - \frac{5}{17} \begin{pmatrix} \frac{3}{5}\lambda \\ -\frac{17}{5}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} + \frac{5}{17} \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{17}\alpha - \frac{3}{17}\lambda + \frac{5}{17}\gamma \\ \lambda \\ \frac{3}{17}\beta - \frac{5}{17}\lambda + \frac{5}{17}\delta \end{pmatrix}$$

Ma allora adesso sappiamo perfettamente come è fatta la matrice B:

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{3}{17}\alpha - \frac{3}{17}\lambda + \frac{5}{17}\gamma & \gamma \\ 0 & \lambda & 0 \\ \beta & \frac{3}{17}\beta - \frac{5}{17}\lambda + \frac{3}{17}\delta & \delta \end{pmatrix}$$

Notiamo che questa matrice dipende da 5 parametri: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$; ma poiché B è una qualsiasi matrice appartenente a $Centr(A)$, abbiamo che ogni matrice di $Centr(A)$ è completamente determinata da 5 parametri liberi di variare in $\mathbb{R}$, ovvero $dimCentr(A) \leq 5$, infatti abbiamo scoperto che B appartiene allo *Span* delle 5 matrici ottenute separando i contributi dei singoli parametri, ma poiché B è un elemento di $Centr(A)$, ne segue che $Centr(A)$ è contenuto nello *Span* delle 5 matrici di prima, ed essendo esse linearmente indipendenti (mi rifiuto di dimostrarlo :)), la dimensione di quello *Span* è 5.
Sappiamo dunque che $dimCentr(A) = 3, 4$, o 5. Però non abbiamo ancora trovato la soluzione, dobbiamo proseguire. Non abbiamo ancora sfruttato un fatto importante: la commutatività di B con A. Vediamo allora cosa succede quando moltiplichiamo la matrice $B \cdot A$ con il vettore e_1 (che equivale applicare $L_B \circ L_A$ a e_1): $A \cdot B \cdot e_1 = B \cdot A \cdot e_1$. Sviluppiamo i due membri separatamente. A sinistra si ha

$$A \cdot B \cdot e_1 = A \cdot (B \cdot e_1) = A \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta \\ 0 \\ -\alpha + 2\beta \end{pmatrix}$$

Mentre a destra abbiamo

$$B \cdot A \cdot e_1 = B \cdot (A \cdot e_1) = B \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{3}{17}\alpha - \frac{3}{17}\lambda + \frac{5}{17}\gamma & \gamma \\ 0 & \lambda & 0 \\ \beta & \frac{3}{17}\beta - \frac{5}{17}\lambda + \frac{5}{17}\delta & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha - \gamma \\ 0 \\ 2\beta - \delta \end{pmatrix}$$

Ma dal momento che questi due valori sono uguali, otteniamo alcune relazioni tra i coefficienti: in particolare, dalla prima coordinata otteniamo $2\alpha + \beta = 2\alpha - \gamma \implies \beta = -\gamma$, mentre dalla terza coordinata otteniamo $-\alpha + 2\beta = 2\beta - \delta \implies \alpha = \delta$. Ma quindi β e γ non erano liberi, anzi, erano legati l'uno a l'altro. Lo stesso vale per α e δ. Ma allora il numero di variabili libere, da 5, si riduce a 3 e la matrice B assume la forma

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{3}{17}\alpha - \frac{3}{17}\lambda - \frac{5}{17}\beta & -\beta \\ 0 & \lambda & 0 \\ \beta & \frac{3}{17}\beta - \frac{5}{17}\lambda + \frac{5}{17}\alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

e separando il contributo di ogni parametro otteniamo che

$$B = \alpha \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{17} & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{17} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{17} & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{17} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{17} & 0 \end{pmatrix}$$

Da qui, con lo stesso ragionamento di sopra, possiamo affermare che $dimCentr(A) \leq 3$ (è facile dimostrare che queste tre matrici sono linearmente indipendenti, infatti si noti che una loro combinazione lineare è data proprio da B e questa è nulla solo se tutti i coefficienti sono nulli, ma dall'elemento b_{11} si ottiene necessariamente che $\alpha = 0$, da b_{13} si ottiene necessariamente che $\beta = 0$, mentre da b_{22} che $\lambda = 0$). Ma avevamo dimostrato che $dimCentr(A) \geq 3$ $\Longrightarrow$ per doppia disuguaglianza possiamo finalmente affermare che $dimCentr(A) = 3$ e poiché $dimCentr(A) = dimCentr(f)$ si ha che $dimCentr(f) = 3$.

Per di più avevamo dimostrato in precedenza che $Span(I_3, A, A^2) \subset Centr(A)$, ma dato che entrambi hanno dimensione 3, per contenimento e uguaglianza dimensionale si ha che $Span(I_3, A, A^2) = Centr(A)$: abbiamo dunque scoperto chi è $Centr(A)$: tutte e sole le matrici che commutano con A sono tutte le combinazioni lineari di I_3, A e A^2. Tramite l'isomorfismo sappiamo anche chi è $Centr(f)$: $Centr(f) = Span(id_{\mathbb{R}^3}, f, f^2)$ ($A^2 \mapsto f^2$ per l'isomorfismo di anelli). Conosciamo quindi anche una base di $Centr(f)$ che è $id_{\mathbb{R}^3}, f, f^2$.

6.2 Esercizio 2

Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M(2, 3, \mathbb{R})$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R})$. Si determini il loro prodotto (notare che non c'è ambiguità nella richiesta, in quanto le due matrici possono essere moltiplicate solo in un modo, ovvero $B \cdot A$: ricordiamo che affinché due matrici possono essere moltiplicate tra di loro, il numero di colonne della prima deve essere uguale al numero di righe della seconda: il prodotto $A \cdot B$ non ha dunque senso).

Soluzione: Ci aspettiamo che il risultato sia una matrice con 2 righe e 3 colonne. Ricordiamo che per definizione $B \cdot A = (B \cdot A^1 | B \cdot A^2 | B \cdot A^3)$. Determiniamo i 3 prodotti separatamente:

$$B \cdot A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 33 \end{pmatrix}$$

Ne segue quindi che la matrice prodotto $B \cdot A$ è

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \end{pmatrix}$$

Osservazione: Notiamo che lo stesso prodotto lo possiamo ottenere nel seguente modo:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} (1\ 2) \cdot A \\ (3\ 4) \cdot A \end{pmatrix}$$

dove $(1\ 2) = B_1$ e $(3\ 4) = B_2$ (dove con B_i si intende la i-esima riga di B): ovvero possiamo pensare al prodotto tra matrici anche come a un prodotto riga per matrice, e non solo come a un prodotto matrice per colonna.
Vogliamo allora dimostrare che è vero in generale che il prodotto riga per matrice e il prodotto matrice per colonna sono uguali. Cerchiamo prima di tutto di capire come è fatto un prodotto riga per matrice: sia $(x_1\ \dots\ x_m)$ una riga di una matrice con m colonne e sia A una matrice con m righe. Valutiamo $(x_1\ \dots\ x_m) \cdot A$: con un piccolo ragionamento si arriva a concludere che questo prodotto eguaglia la combinazione lineare $x_1 A_1 + ... + x_m A_m$ (se lo si pensa come un prodotto matriciale risulta chiaro), che è lo speculare del prodotto matrice

per colonna. Se dunque prendiamo la matrice B e la scriviamo con le sue righe (facciamo che B abbia s righe): $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \dots \\ B_s \end{pmatrix}$ il prodotto $B \cdot A$ sarà:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} B_1 \cdot A \\ \dots \\ B_s \cdot A \end{pmatrix}$$

In conclusione questo metodo ci dà una forma esplicita di chi sono le righe del prodotto.

Osservazione: Nel caso in cui due matrici A e B possano essere moltiplicate in entrambi i versi (ovvero se $A \in M(m,n,\mathbb{K})$ e $B \in M(n,m,\mathbb{K})$ con n e m non necessariamente distinti), non è detto che i due prodotti si assomiglino, anzi! Infatti, se $m \neq n$ il prodotto $A \cdot B$ darà una matrice di taglia $m \times m$, mentre il prodotto $B \cdot A$ darà una matrice di taglia $n \times n$. Se invece $m = n$ è possibile che i due prodotti siano uguali (ovvero che ci sia commutatività, si pensi al centralizzatore dell'Esercizio 1), ma non è sempre detto! Prendiamo ad esempio le due matrici

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valutiamo i due prodotti

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mentre

$$N \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questo mostra che i due prodotti sono, in generale, diversi. In realtà questo esempio fa vedere di più: ovvero che $M(n,\mathbb{K})$ è un anello non commutativo (lo è solo se $n = 1$, infatti $M(1,\mathbb{K})$ è una copia di $\mathbb{K}$, che essendo un campo è un anello commutativo) e che per di più non è un dominio (contiene dei divisori di 0).

6.3 Esercizio 3

Siano $A \in M(m,n,\mathbb{K})$ e $B \in M(n,m,\mathbb{K})$ e sia $B \cdot A$ il loro prodotto. Dimostra che $(B \cdot A)^\top = A^\top B^\top$.

Dimostrazione. Definiamo $B \cdot A$ con la notazione delle colonne: $B \cdot A = (B \cdot A^1|...|B \cdot A^n)$. Trasponiamo questo risultato: trasporre significa, in soldoni, prendere le colonne e farle diventare righe, quindi, con la stessa notazione di prima, avremo:

$$(B \cdot A)^\top = \begin{pmatrix} (B \cdot A^1)^\top \\ \dots \\ (B \cdot A^n)^\top \end{pmatrix}$$

sappiamo così come sono fatte le righe della trasposta di $B \cdot A$. Vediamo ora, in dettaglio, come è fatta la prima riga di $(B \cdot A)^\top$: definendo A^1 come $A^1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ e B come $B = (B^1|...|B^n)$ si ha che $B \cdot A^1 = x_1 B^1 + ... + x_n B^n$. Trasponiamo ora quanto appena scritto: sapendo che $^\top$ è un'applicazione lineare avremo:

$$(B \cdot A^1)^\top = (x_1 B^1 + ... + x_n B^n)^\top = x_1 (B^1)^\top + ... + x_n (B^n)^\top$$

ma questo risultato è, concordemente a quanto visto nell'Esercizio 2, proprio il prodotto tra $(x_1 \dots x_n)$ e $B^\top$, ovvero $(B \cdot A^1)^\top = (A^1)^\top \cdot B^\top$. Si noti che l'aver scelto esattamente la prima riga non è un caso specifico: lo stesso sarebbe accaduto scegliendo la seconda, la terza o l'ultima. Quindi per ogni riga i di $(B \cdot A)^\top$ si avrà: $((B \cdot A^i)^\top = ((A^i)^\top \cdot B^\top)$, ovvero

$$(B \cdot A)^\top = \begin{pmatrix} (A^1)^\top \cdot B^\top \\ \dots \\ (A^n)^\top \cdot B^\top \end{pmatrix}$$

Ma adesso siamo esattamente nel formalismo dell'osservazione dell'Esercizio 2 di questa esercitazione: abbiamo delle righe che vengono moltiplicate per la matrice fissa $B^\top$, in particolare queste righe sono le righe di $A^\top$ e quindi

$$(B \cdot A)^\top = \begin{pmatrix} (A^1)^\top \cdot B^\top \\ \dots \\ (A^n)^\top \cdot B^\top \end{pmatrix} = A^\top \cdot B^\top$$

Osservazione: se $A \in M(n, \mathbb{K})$ è una matrice invertibile (si ricorda che ogni matrice invertibile è quadrata) e sia A^{-1} la sua inversa, sappiamo che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ e passando alla trasposta si ha $(A \cdot A^{-1})^\top = (A^{-1})^\top \cdot A^\top = (A^{-1} \cdot A) = A^\top \cdot (A^{-1})^\top = I_n^\top = I_n$: ma allora anche $A^\top$ è invertibile e per di più la sua inversa è $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

6.4 Esercizio 4

Siano $A \in M(m, n, \mathbb{K})$ e $B \in M(n, m, \mathbb{K})$ due matrici. Dimostra che $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$.

Dimostrazione. Per dimostrare questa uguaglianza facciamo vedere che partendo con il definire una delle due tracce si arriva a definire l'altra. Definiamo la traccia di $A \cdot B$:

$$tr(A \cdot B) = \sum_{i=1}^{m} (ab)_{ii}$$

dove con $(ab)_{ii}$ indico l'elemento di $A \cdot B$ di riga i e colonna i. Per definizione, però, l'elemento di $A \cdot B$ di riga i e colonna i è il prodotto tra la i-esima riga di A e la i-esima colonna di B:

$$tr(A \cdot B) = \sum_{i=1}^{m} (ab)_{ii} = \sum_{i=1}^{m} A_i \cdot B^i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{ji}$$

dove l'ultima uguaglianza si giustifica considerando la i-esima riga di A e la i-esima colonna di B nel modo seguente:

$$A_i = (a_{i1} \dots a_{in}) \;\; B^i = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ \dots \\ b_{ni} \end{pmatrix}$$

Ma ora $\mathbb{K}$ è un campo, quindi la somma è commutativa: posso scambiare l'ordine di sommatoria:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} b_{ji} \cdot a_{ij}$$

ma notiamo che $\sum_{i=1}^{m} b_{ji} \cdot a_{ij}$ è il prodotto tra la j-esima riga di B e la j-esima colonna di A (pensandola come prima, se A^j e B_j sono fatte come segue

$$A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad B = (b_{j1} \dots b_{jm})$$

allora la cosa torna), quindi si avrà:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} b_{ji} \cdot a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} B_j \cdot A^j$$

che rappresenta la somma degli elementi di riga j e colonna j della matrice $B \cdot A$, per $j \in \{1, ..., m\}$, ovvero la somma degli elementi della diagonale di $B \cdot A$, ovvero $tr(B \cdot A)$. Ripercorrendo tutte le uguaglianze otteniamo

$$tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$$

6.5 Esercizio 5

Si riveda l'Esercizio 7 dell'esercitazione del 04/11/2021. Dimostrare che $dimA_n = \frac{n(n-1)}{2}$ usando la formula di Grassmann (ancora sotto l'ipotesi che $char\mathbb{K} \neq 2$).

Dimostrazione. Tramite l'Esercizio 4 dell'esercitazione del 26/10/2021 sappiamo che $M(n,\mathbb{K}) = A_n \oplus S_n$. Per la formula di Grassmann si ha

$$dimM(n,\mathbb{K}) = dim(A_n \oplus S_n) = dim(A_n) + dim(S_n) - dim(A_n \cap S_n)$$

ma dato che A_n e S_n sono in somma diretta, la loro intersezione è la sola matrice nulla e dunque $dim(A_n \cap S_n) = 0$. Dato che nell'Esercizio 6 dell'esercitazione del 04/11/2021 avevamo dimostrato che $dim(S_n) = \frac{n(n+1)}{2}$ e sapendo dalla teoria che $dim(M(n,\mathbb{K})) = n^2$ ne segue che

$$dim(A_n) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

6.6 Esercizio 6

Siano $U, W \subset \mathbb{R}^3$ due sottospazi vettoriali tali che $dimU = dimW = 2$. Dimostrare tramite la formula di Grassmann che essi si intersecano in almeno una retta.

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato nella seconda parte dell'Esercizio 5 della scorsa esercitazione che i due sottospazi non possono intersecarsi in un punto, perché ciò produrrebbe un assurdo (questione dell'indipendenza lineare di 4 vettori in $\mathbb{R}^3$). Dimostriamolo ora con la formula di Grassmann: dal fatto che

$$dim(U+W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$$

otteniamo che

$$dim(U \cap W) = dim(U) + dim(W) - dim(U+W) = 2 + 2 - dim(U+W) = 4 - dim(U+W)$$

Poiché la somma di due sottospazi di uno spazio V è un sottospazio di V, $U + W \subset \mathbb{R}^3$ e quindi $dim(U+W) \leq dim\mathbb{R}^3 = 3$. Ma quindi

$$dim(U \cap W) = 4 - dim(U+W) \geq 4 - 3 = 1 \Longrightarrow dim(U \cap W) \geq 1$$

ovvero l'intersezione ha dimensione ALMENO uguale a 1 (che è come dire che si intersecano in almeno una retta).

6.7 Esercizio 7

Si dimostri che se $\mathbb{R}^4 \supset U = Span(e_1, e_2)$ e $\mathbb{R}^4 \supset W = Span(e_3, e_4)$ allora $U \cap W = \{0\}$.

Dimostrazione. Per dimostrare che un'intersezione è banale posso dimostrare che essa ha dimensione nulla: tramite la formula di Grassmann abbiamo che

$$dim(U+W) = dimU + dimW - dim(U \cap W)$$

Ovviamente $dimU = dimW = 2$ in quanto e_1, e_2 è una base di U (e_1, e_2 generano $Span(e_1, e_2)$ e per di più sono linearmente indipendenti) e e_3, e_4 è una base di W (per lo stesso motivo di prima).
Ma chi è $U+W$? Per definizione $U+W = Span(U \cup W) = Span(Span(e_1, e_2) \cup Span(e_3, e_4)) = Span(e_1, e_2, e_3, e_4)$, ma dal momento che sappiamo che e_1, e_2, e_3, e_4 è la base canonica di $\mathbb{R}^4$, si sa che $U+W = Span(e_1, e_2, e_3, e_4) = \mathbb{R}^4$ e quindi che $dim(U+W) = 4$. Sostituendo nella formula di prima si ha che

$$dim(U \cap W) = dimU + dimW - dim(U+W) = 2 + 2 - 4 = 0$$

il che dimostra la tesi.

6.8 Esercizio 8

Si dimostri che $\forall q \in \mathbb{R}_d[t]$, $\exists!\, p \in \mathbb{R}_d[t]$ tale che $q = p(0)t^d + p(1)t^{d-1} + ... + p(d)$.

Dimostrazione. Essendo questa una dimostrazione di esistenza e unicità, dobbiamo dimostrare prima l'esistenza del polinomio e successivamente la sua unicità. Possiamo dimostrare la tesi utilizzando un'opportuna applicazione lineare. Sia $f : \mathbb{R}_d[t] \longrightarrow \mathbb{R}_d[t]$ che associa a $p \mapsto p(0)t^d + p(1)t^{d-1} + ... + p(d)$: tale applicazione è lineare in quanto è

additiva : se $p, q \in \mathbb{R}_d[t]$, allora

$$f(p+q) = (p+q)(0)t^d + (p+q)(1)t^{d-1} + ... + (p+q)(d) =$$

$$= p(0)t^d + p(1)t^{d-1} + ... + p(d) + q(0)t^d + q(1)t^{d-1} + ... + q(d) = f(p) + f(q)$$

omogenea: se $p \in \mathbb{R}_d[t]$ e $\mu \in \mathbb{R}_d[t]$, allora:

$$f(\mu p) = (\mu p)(0)t^d + (\mu p)(1)t^{d-1} + ... + (\mu p)(d) = \mu(p(0)t^d + p(1)t^{d-1} + ... + p(d)) = \mu f(p)$$

Notiamo che dimostrare la tesi significa dimostrare che f è un isomorfismo: infatti la surgettività dimostra l'esistenza del polinomio, mentre l'iniettività ne dimostra l'unicità. Dimostriamolo allora :)
Poiché f va da uno spazio in sé stesso (è un endomorfismo), per quanto visto a teoria, grazie alla formula sulle dimensioni ci basta dimostrare o che è iniettiva o che è surgettiva (l'una implica l'altra perché gli spazi hanno la stessa dimensione). Dimostriamo l'iniettività, che di solito è più facile: valutiamo allora $Kerf$: $Kerf = \{p \in \mathbb{R}_d[t] \,|\, f(p) = 0\} = \{p \in \mathbb{R}_d[t] \,|\, p(0)t^d + p(1)t^{d-1} + ... + p(d) = 0\}$, dove 0 è il polinomio nullo, ma dato che il polinomio nullo ha tutti i coefficienti nulli si ha che $p(0) = p(1) = ... = p(d) = 0$. Abbiamo scoperto allora che se $p \in Kerf$ allora ha almeno $d+1$ radici, ma dato che per ipotesi p ha grado $leqd$, l'unico polinomio di $\mathbb{R}_d[t]$ che "ha più radici del suo grado" è il polinomio nullo $\Longrightarrow Kerf = \{0\} \Longleftrightarrow f$ è iniettiva $\Longleftrightarrow f$ è surgettiva. Dunque f è un isomorfismo, il che dimostra la tesi.

6.9 Esercizio 9

Sia $g : \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow M(3, \mathbb{R})$ che manda $p \mapsto \begin{pmatrix} 0 & p(0) & p(1) \\ -p(0) & 0 & p(2) \\ -p(1) & -p(2) & 0 \end{pmatrix}$. Dimostra che $Img = A_3$.

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che $Img \subset A_3$ in quanto $\forall p \in \mathbb{R}_2[t]$, $g(p)$ è una matrice antisimmetrica. Se allora restringiamo il codominio ad A_3 otteniamo $g : \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow A_3$ e ci basta dimostrare che g è surgettiva. Notiamo tuttavia che $dim\mathbb{R}_2[t] = dimA_3 = 3$ (in quanto $dimA_3 = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ e $dim\mathbb{R}_2[t]$ in quanto $1, t, t^2$ è una base di $\mathbb{R}_2[t]$), ma allora dimostrare che g è surgettiva coincide con il dimostrare che è un isomorfismo e quindi, per la formula di nucleo e immagine, coincide con il dimostrare che g è iniettiva (ricapitolando: se g è iniettiva, allora è un isomorfismo in quanto la dimensione dello spazio di arrivo e quello dello spazio di partenza sono uguali e dunque è anche surgettiva). Dimostriamo allora che g è iniettiva: consideriamo $Kerg$:

$$Kerg = \{p \in \mathbb{R}_2[t] \,|\, g(p) = 0\} = \left\{ p \in \mathbb{R}_2[t] \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & p(0) & p(1) \\ -p(0) & 0 & p(2) \\ -p(1) & -p(2) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ovviamente $\begin{pmatrix} 0 & p(0) & p(1) \\ -p(0) & 0 & p(2) \\ -p(1) & -p(2) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ tutti i coefficienti della matrice sono uguali a 0, ovvero $p(0) = p(1) = p(2) = 0$. Abbiamo quindi scoperto che se $p \in Kerg$ allora p si annulla in 0,1 e 2. Ma dato che per ipotesi p ha grado ≤ 2, si ha necessariamente che $p = 0$, in quanto il polinomio nullo è l'unico polinomio che appartiene a $\mathbb{R}_2[t]$ e ha più di 2 radici. Dunque $Kerg = \{0\} \Longleftrightarrow g$ è iniettiva $\Longleftrightarrow g$ è surgettiva, il che dimostra la tesi.

7 Esercitazione 18-11-2021

7.1 Esercizio 1

Siano V e W due spazi vettoriali tali che $dimV = n$ e $dimW = m$. Si determini $dim(V \times W)$.

Soluzione: Prima di addentrarci nel determinare la dimensione del prodotto cartesiano, facciamo qualche appunto su ciò che abbiamo. Sappiamo che a partire da $V \times W$ possiamo determinare due proiezioni, una su V e una su W fatte come segue:

$$\pi_1 : V \times W \twoheadrightarrow V \;\; (v, w) \mapsto v$$

$$\pi_2 : V \times W \twoheadrightarrow W \;\; (v, w) \mapsto w$$

Abbiamo già dimostrato a teoria che π_1 e π_2 sono sia lineari che surgettive. Esistono inoltre però due immersioni i_1 e i_2:

$$i_1 : V \hookrightarrow V \times W \;\; v \mapsto (v, 0)$$

$$i_2 : W \hookrightarrow V \times W \;\; w \mapsto (0, w)$$

Abbiamo già dimostrato a teoria che le due immersioni sono lineari e iniettive. Quindi i prodotti cartesiani sono spazi molto ricchi, dai quali è possibile sempre definire questi due tipi di applicazioni lineari, che in certi casi risulteranno fondamentali. Notiamo inoltre che $Im(i_1) = V \times \{0\}$ e $Im(i_2) = \{0\} \times W$: $Im(i_1)$ è una copia di V dentro $V \times W$ e $Im(i_2)$ è una copia di W dentro $V \times W$ (questo sarà utile per la dimostrazione).
Dimostriamo inoltre che possiamo scrivere $V \times W$ come somma diretta tra $V \times \{0\}$ e $\{0\} \times W$: $V \times W = (V \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times W)$. Facciamo vedere che la somma è diretta: sia $(v, w) \in (V \times \{0\}) \cap (\{0\} \times W)$, allora $v = 0$ in quanto $(v, w) \in \{0\} \times W$ e $w = 0$ in quanto $(v, w) \in V \times \{0\}W \Longrightarrow (V \times \{0\}) \cap (\{0\} \times W) = \{(0, 0)\}$. Mostriamo invece ora che $(V \times \{0\}) + (\{0\} \times W) = V \times W$: facciamo vedere che sussiste una doppia inclusione:

$\cdot \subset$: ovvio in quanto $V \times \{0\}$ e $\{0\} \times W$ sono sottospazi di $V \times W$ (basta pensare che $V \times \{0\} = Im(i_1) \subset V \times W$ e $\{0\} \times W = Im(i_2) \subset V \times W$ e che le immagini tramite applicazioni lineari sono sottospazi) e $(V \times \{0\}) + (\{0\} \times W)$ è il sottospazio somma.

$\cdot \supset$: sia $(v, w) \in V \times W$, per definizione di somma in $V \times W$ posso scrivere (v, w) come $(v, w) = (v, 0) + (0, w) \in (V \times \{0\}) + (\{0\} \times W)$ e quindi, poiché (v, w) è un elemento casuale di $V \times W$, si avrà che $V \times W \subset (V \times \{0\}) + (\{0\} \times W)$.

Questo dimostra che $V \times W = (V \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times W)$. Per dimostrare la tesi adesso abbiamo tutto ciò che ci occorre: usando la formula di Grassmann si ha che

$$dim(V\times W) = dim((V\times\{0\})+(\{0\}\times W)) = dim(V\times\{0\})+dim(\{0\}\times W)-dim((V\times\{0\})\cap(\{0\}\times W))$$

ma $dim((V \times \{0\}) \cap (\{0\} \times W)) = 0$ in quanto $(V \times \{0\}) \cap (\{0\} \times W) = \{(0, 0)\}$ e $dim(V \times \{0\}) = dimV$ e $dim(\{0\} \times W) = dimW$ in quanto, per quel che abbiamo detto sopra, $(V \times \{0\})$ è una copia isomorfa di V dentro $V \times W$ e $(\{0\} \times W)$ è una copia isomorfa di W dentro $V \times W$. Quindi, per concludere, otteniamo che

$$dim(V \times W) = dimV + dimW = n + m$$

7.2 Esercizio 2

Dimostra che se V e W sono $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, $B = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$ è una base di V (quindi V ha dimensione n) e $D = \{w_1, ..., w_m\} \subset W$ è una base di W (quindi W ha dimensione m), allora $\{(v_1, 0), ..., (v_n, 0), (0, w_1), ..., (0, w_m)\}$ è una base di $V \times W$.

Dimostrazione. Notiamo che per l'Esercizio 1 di sopra, $dim(V \times W) = dimV + dimW = n + m$. Dal momento che $\#\{(v_1, 0), ..., (v_n, 0), (0, w_1), ..., (0, w_m)\} = n + m$, essi sono tanti quanto è la dimensione dello spazio, quindi sono "nel numero giusto". Ci basta dunque dimostrare che $(v_1, 0), ..., (v_n, 0), (0, w_1), ..., (0, w_m)$ sono linearmente indipendenti: siano allora $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_m \in \mathbb{K}$ e sia $\alpha_1(v_1, 0) + ... + \alpha_n(v_n, 0) + \beta_1(0, w_1) + ... + \beta_m(0, w_m) = (0, 0)$ una combinazione lineare nulla di $(v_1, 0), ..., (v_n, 0), (0, w_1), ..., (0, w_m)$, vogliamo dimostrare che $\alpha_1 = ... = \alpha_n = \beta_1 = ... = \beta_m = 0$. Tramite la definizione di somma, possiamo riscrivere la combinazione di sopra come segue: $\alpha_1(v_1, 0)+...+\alpha_n(v_n, 0)+\beta_1(0, w_1)+...+\beta_m(0, w_m) = (\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n, \beta_1 w_1, ..., \beta_m w_m) = (0, 0)$ che è vero se e solo se $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$ e $\beta_1 w_1+...+\beta_m w_m = 0$, ma dato che $\{v_1, ..., v_n\}$ è una base di V, e quindi $v_1, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti, si ha necessariamente che $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$. Con lo stesso ragionamento possiamo affermare che $\beta_1 = ... = \beta_m = 0$. Ma allora $\alpha_1 = ... = \alpha_n = \beta_1 = ... = \beta_m = 0$ dimostra che $(v_1, 0), ..., (v_n, 0), (0, w_1), ..., (0, w_m)$ sono linearmente indipendenti, e quindi che sono una base di $V \times W$ (sono nel numero giusto!).

7.3 Esercizio 3

Siano V, W e Z tre spazi vettoriali tali che $dimV < +\infty$ e $f : V \longrightarrow W$ e $g : W \longrightarrow Z$ due applicazioni lineari. Determinare, in funzione di altri parametri, $rnk(g \circ f)$ (dove si ricorda che $rnk(g \circ f) = dimIm(g \circ f)$).

Soluzione: Dalla teoria sappiamo che composizione di omomorfismi è un omomorfismo e per di più sappiamo che $Im(g \circ f) = g(Imf) \subset Img$ (N.B. Imf ha dimensione finita in quanto V ha dimensione finita e per la formula di nucleo e immagine, $dimImf \leq dimV$). Possiamo allora considerare un'applicazione lineare alla quale poter applicare la formula di nucleo e immagine per determinare $dimIm(g \circ f)$, in particolare se consideriamo l'applicazione $g|_{Imf} : Imf \longrightarrow Z$, abbiamo che $Im(g|_{Imf}) = Im(g \circ f)$ e qui possiamo applicare la formula di nucleo e immagine:

$$dimIm(g \circ f) = dimImf - dimKer(g|_{Imf})$$

e per quanto visto a teoria $Ker(g|_{Imf}) = Kerg \cap Imf$:

$$rnk(g \circ f) = rnkf - dim(Kerg \cap Imf)$$

quindi, a livello puramente teorico, $rnk(g\circ f) \leq rnkf$, ovvero la dimensione dell'immagine di una composizione può solo diminuire o rimanere uguale rispetto alla dimensione dell'immagine della prima applicazione. In particolare se $Imf \cap Kerg = \{0\}$, allora $rnk(g\circ f) = rnkf$.

Osservazione: avrei potuto scrivere la stessa cosa di sopra in termini di soli nuclei: $rnkf = dimV - dimKerf$ e $rnk(g \circ f) = dimV - dimKer(g \circ f)$, quindi:

$$dimV - dimKer(g \circ f) = dimV - dimKerf - dim(Kerg \cap Imf) \implies$$

$$dimKer(g \circ f) = dimKerf + dim(Kerg \cap Imf)$$

Notiamo inoltre che possiamo descrivere esplicitamente $Ker(g\circ f)$: infatti se $v \in Ker(g\circ f)$ allora $(g \circ f)(v) = g(f(v)) = 0 \implies f(v) \in Kerg \implies v \in f^{-1}(Kerg)$ ($f^{-1}(Kerg)$ è la controimmagine insiemistica di $Kerg$ tramite f), quindi $Ker(g \circ f) \subset f^{-1}(Kerg)$, ma è vero anche che $f^{-1}(Kerg) \subset Ker(g \circ f)$ in quanto se $v \in f^{-1}(Kerg)$ allora $\exists\, w \in Kerg$ tale che $f(v) = w$, ma, applicando g si ha $g(f(v)) = g(w) = 0$, ovvero $v \in Ker(g \circ f)$: quindi otteniamo che $f^{-1}(Kerg) = Ker(g \circ f)$. È vero anche però che $f^{-1}(Kerg) = f^{-1}(Kerg \cap Imf)$, infatti se $v \in f^{-1}(Kerg)$, allora $f(v) \in Kerg$, ma è vero anche che $f(v) \in Imf$ per definizione di immagine e quindi $f(v) \in Kerg \cap Imf$ e quindi $f^{-1}(Kerg) \subset f^{-1}(Kerg \cap Imf)$. Per di più se $v_1 \in f^{-1}(Kerg \cap Imf)$, allora $\exists\, w \in Kerg \cap Imf$ tale che $f(v_1) = w$, ma dato che $w \in Kerg$ (appartenendo a $Kerg \cap Imf$) si ha che $g(f(v_1)) = g(w) = 0$, ovvero $v_1 \in f^{-1}(Kerg)$, da cui segue $f^{-1}(Kerg) \supset f^{-1}(Kerg\cap Imf)$, che implica $f^{-1}(Kerg) = f^{-1}(Kerg \cap Imf)$. Tutto ciò dimostra che $Ker(g \circ f) = f^{-1}(Imf \cap Kerg)$.

7.4 Esercizio 4, anche detto "l'esercizio infinito" parte 2

Costruire una $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ lineare che soddisfi il maggior numero delle seguenti condizioni (nell'ordine e contemporaneamente):

i) $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ o

$f(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\4\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ (nell'ultimo caso la doppia scelta è dettata dal fatto che si potrà creare un'applicazione solo con uno dei due vettori)

$ii)$ $dimImf = 1, 2, 3$

$iii)$ $Kerf \subset Span(\begin{pmatrix}2\\2\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix})$

$iv)$ $e_1 \in Im(f^2)$

$v)$ $dimIm(f^2) = 1, 2$

$vi)$ $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix} \in Im(f^2)$

$vii)$ $f(\begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\\0\end{pmatrix}$ o $f(\begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$

Dimostrazione. $i)$ l'idea per costruire tale f si basa sul fatto che ogni applicazione lineare è completamente determinata una volta fissata una base. Qua abbiamo 4 vettori di $\mathbb{R}^4$, che potrebbero (solo se linearmente indipendenti) formare una base di $\mathbb{R}^4$ (in tal caso la f sarebbe anche unica, quindi ci speriamo poco :')). Verifichiamo l'indipendenza lineare tramite *Span*. Per semplificare le cose chiamiamo

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix} = v_1, \quad \begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix} = v_2, \quad \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} = v_3, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\4\end{pmatrix} = v_4$$

· Mi chiedo se $v_2 \in Span(v_1)$: notiamo che la terza coordinata di v_1 è nulla, quindi ogni vettore in $Span(v_1)$ ha la terza coordinata nulla. Dato che la terza coordinata di v_2 è -2, esso non appartiene a $Span(v_1)$.

· Mi chiedo se $v_3 \in Span(v_1, v_2)$. Consideriamo una combinazione lineare di v_1 e v_2 che eguagli v_3: siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e sia

$$\alpha \begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha+\beta\\\alpha+\beta\\-2\beta\\2\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

che genera il sistema

$$\begin{cases}\alpha+\beta & = -1\\ \alpha+\beta & = -1\\ -2\beta & = 1\\ 2\alpha & = 1\end{cases}$$

Questo sistema tuttavia non ha soluzione, in quanto dalla terza e quarta equazione otterremmo $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = -\frac{1}{2}$, che però generano una contraddizione nella prima e seconda equazione in quanto si avrebbe $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 = 1$. Quindi $v_3 \notin Span(v_1, v_2)$.

· Mi chiedo se $v_4 \in Span(v_1, v_2, v_3)$. In questo caso la risposta è sì, in quanto v_4 è combinazione lineare degli altri 3 e in particolare si ha che

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

è la combinazione cercata. Quindi $v_4 \in Span(v_1, v_2, v_3) \implies$ i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 non sono linearmente indipendenti e quindi non sono una base di $\mathbb{R}^4$. Non possiamo dunque descrivere f definendo dei valori su una base di $\mathbb{R}^4$ (molto sad). Tuttavia, possiamo, tramite la combinazione lineare vista sopra, capire chi è $f(v_4)$:

$$f(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\4\end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix}) + 2f(\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}) =$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

Quindi $f(v_4)$ non è casuale, ma è completamente determinato da v_1, v_2, v_3: $f(v_4) = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\-2\end{pmatrix}$
e non può essere altro.
D'ora in poi chiameremo (per semplicità) i vettori

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} = w_1, \quad \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = w_2, \quad \begin{pmatrix}2\\0\\0\\-2\end{pmatrix} = w_3$$

Quindi se riusciamo a costruire un'applicazione lineare che manda v_1 in w_1, v_2 in w_2 e v_3 in w_3, allora automaticamente v_4 andrà in $w_1 + w_2 + 2w_3$. Come costruiamo un'applicazione del genere? Dando i valori su una base: dato che $\{v_1, v_2, v_3\}$ è un insieme linearmente indipendente, possiamo completare a base di $\mathbb{R}^4$: per farlo ci basta aggiungere a $\{v_1, v_2, v_3\}$ un vettore che non stia in $Span(v_1, v_2, v_3)$, un esempio è il vettore $e_1 \in \mathbb{R}^4$, infatti una qualsiasi combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 è fatta come segue: siano $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, allora la combinazione $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ è data da

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \begin{pmatrix}\alpha + \beta - \gamma\\ \alpha + \beta - \gamma\\ -2\beta + \gamma\\ 2\alpha + \gamma\end{pmatrix}$$

Notiamo che in una combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 le prime due coordinate sono uguali: poiché e_1 ha la prima coordinata uguale a 1 e la seconda uguale a 0, si ha che $e_1 \notin Span(v_1, v_2, v_3) \implies \{v_1, v_2, v_3, e_1\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$. Diamo ora i valori a f sulla base $\{v_1, v_2, v_3, e_1\}$:

$$f(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\ f(\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ f(\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\ f(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

dove l'attribuzione $e_1 \mapsto e_1$ è casuale (posso mandarlo dove voglio!). Questa applicazione che abbiamo costruito (che definisce un'unica applicazione in quanto è definita su una base di $\mathbb{R}^4$) rispetta la richiesta $i)$ (notare che non è l'unica applicazione che avremmo potuto scegliere: cambiando l'immagine di e_1 cambia applicazione).

$ii)$ Dal momento che le condizioni devono essere soddisfatte in ordine, per trovare la dimensione dell'immagine abbiamo già dei valori di riferimento. In particolare $w_1, w_2, w_3 \in$

Imf e quindi $Span(w_1, w_2, w_3) \subset Imf$. Ci chiediamo allora quanto sia la dimensione di $Span(w_1, w_2, w_3)$: per determinarla dobbiamo verificare se W_1, w_2, w_3 sono linearmente indipendenti o meno. È facile verificare che lo sono, infatti $w_2 \notin Span(w_1)$ in quanto la seconda coordinata di w_1 è nulla mentre la seconda coordinata di w_2 non lo è, inoltre $w_3 \notin Span(w_1, w_2)$ poiché la quarta coordinata di w_1 e w_2 è nulla, mentre la quarta coordinata di w_3 non lo è. Ma allora $dimSpan(w_1, w_2, w_3) = 3$ e poiché $Span(w_1, w_2, w_3) \subset Imf$ necessariamente si ha che $dimImf \geq 3$: poiché nelle richieste si chiedeva una dimensione di Imf uguale a 1 o 2 o 3, l'unica richiesta che può essere soddisfatta è che $dimImf = 3$. Ma allora, dato che $Span(w_1, w_2, w_3) = 3 \subset Imf$ e $dimSpan(w_1, w_2, w_3) = dimImf$ per inclusione e uguaglianza dimensionale si ha che $Span(w_1, w_2, w_3) = Imf$. Tornando al punto $i)$ allora troviamo che la seconda richiesta limita le scelte che abbiamo: infatti definendo l'applicazione sui valori di una base di $\mathbb{R}^4$ non definiamo chi è Imf: per far sì che $Span(w_1, w_2, w_3) = Imf$ si deve far sì che $f(e_1) \in Span(w_1, w_2, w_3)$. Poiché $e_1 \notin Span(w_1, w_2, w_3)$ dobbiamo cambiare il valore che abbiamo dato a e_1. Possiamo ad esempio scegliere $f(e_1) = w_1$. Quindi la nuova f, definita sui valori della base $\{v_1, v_2, v_3, e_1\}$ che associa nel modo seguente $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$, $f(v_3) = w_3$, $f(e_1) = w_1$ rispetta le condizioni $i)$ e $ii)$. Notiamo che sapendo la dimensione di Imf, conosciamo anche $dimKerf = dim\mathbb{R}^4 - dimImf = 4 - 3 = 1$.

Scriviamo, per comodità successiva, $Span(w_1, w_2, w_3)$ e $Span(v_1, v_2, v_3)$ come equazioni. Sia $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in Span(w_1, w_2, w_3)$, allora $\exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta + \gamma \\ \beta \\ -\alpha \\ -\gamma \end{pmatrix}$$

la cui uguaglianza dà vita a un sistema lineare:

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = x \\ \beta = y \\ -\alpha = z \\ -\gamma = t \end{cases}$$

e sostituendo le ultime tre nella prima otteniamo $x = -z - y - t$, ovvero $x + z + y + t = 0$. Quindi otteniamo che

$$Span(w_1, w_2, w_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + z + y + t = 0 \right\}$$

Notiamo che la cosa ha senso in quanto sia w_1 che w_2 che w_3 rispettano la proprietà scritta. In più l'insieme di sopra ha dimensione 3 poiché è un iperpiano dentro $\mathbb{R}^4$: per contenimento e uguaglianza dimensionale effettivamente i due sottospazi sono uguali.

Sia ora $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in Span(v_1, v_2, v_3)$, allora $\exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta - \gamma \\ \alpha + \beta - \gamma \\ -2\beta + \gamma \\ 2\alpha + \beta + \gamma \end{pmatrix}$$

la cui uguaglianza dà vita a un sistema lineare:

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = x \\ \alpha + \beta - \gamma = y \\ -2\beta + \gamma = z \\ 2\alpha + \beta + \gamma = t \end{cases}$$

da cui otteniamo l'unica equazione $x = y$. Quindi

$$Span(v_1, v_2, v_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x = y \right\}$$

$iii)$ Si richiede qui di collocare il nucleo di f nello $Span$ dei due vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = u_1$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = u_2$ (sappiamo già che $dimKerf = 1$). Notiamo che anche questa volta $kerf$ varia a seconda di dove decidiamo di mandare e_1 (è l'unica scelta che possiamo fare). Notiamo anche che per la scelta fatta in $ii)$ (mandare e_1 in w_1) si avrà che $f(v_1 - e_1) = 0$, infatti $f(v_1 - e_1) = f(v_1) - f(e_1) = w_1 - w_1 = 0$, quindi $v_1 - e_1 \in Kerf$, ma allora anche $Span(v_1 - e_1) \subset Kerf$ e, poiché $dimKerf = 1$, per contenimento e uguaglianza dimensionale si avrebbe che $Span(v_1 - e_1) = Kerf$ (questa è solo un'osservazione).
Dobbiamo verificare se è possibile o meno che $Kerf \subset Span(u_1, u_2)$. Notiamo che per l'Esercizio 2 dell'esercitazione del 09-11, abbiamo dato una caratterizzazione di quando le immagini di alcuni vettori tramite omomorfismo sono indipendenti: le immagini tramite omomorfismo di n vettori $v_1, ..., v_n$ sono indipendenti se e solo se i vettori sono indipendenti e $Kerf \cap Span(v_1, ..., v_n) = \{0\}$. Quindi se $Kerf \subset Span(u_1, u_2)$ si ha anche che $Kerf \cap Span(u_1, u_2) = Kerf$. Se quindi $f(u_1)$ e $f(u_2)$ sono linearmente indipendenti, allora, necessariamente, si avrà che $Kerf \cap Span(u_1, u_2) = \{0\}$, ma dato che $dimKerf = 1$, la condizione non verrebbe soddisfatta. Se invece $f(u_1)$ e $f(u_2)$ sono linearmente dipendenti, allora c'è speranza di contenimento. Verifichiamo allora se $f(u_1)$ e $f(u_2)$ sono o meno linearmente indipendenti.
Notiamo che u_1 e u_2 hanno le prime due coordinate uguali, quindi appartengono a $Span(v_1, v_2, v_3)$: possiamo trovare una combinazione lineare che li genera: con semplici passaggi algebrici otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}v_1 + \frac{3}{4}v_2 - \frac{1}{2}v_3$$

Allora le loro immagini sono:

$$f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = f(\frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2) = \frac{1}{2}f(v_1) - \frac{1}{2}f(v_2) = \frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}) = f(\frac{3}{4}v_1 + \frac{3}{4}v_2 - \frac{1}{2}v_3) = \frac{3}{4}f(v_1) + \frac{3}{4}f(v_2) - \frac{1}{2}f(v_3) = \frac{3}{4}w_1 + \frac{3}{4}w_2 - \frac{1}{2}w_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Notiamo che i due vettori ottenuti sono indipendenti per la posizione dello 0 nel primo vettore alla quarta coordinata. Ma allora $Kerf \cap Span(u_1, u_2) = \{0\}$ e ciò non è possibile se $Kerf \subset Span(u_1, u_2)$ e $dimKerf = 1$. Quindi questa terza condizione non può essere soddisfatta.

Osservazione: la scelta su dove mandare e_1 in realtà non ha determinato niente, in quanto la dimensione di $Kerf$ è determinata dalla condizione $ii)$.

$iv)$ Ci chiediamo se è possibile che $e_1 \in Im(f^2)$. Notiamo che $e_1 \notin Imf$, infatti $Imf = Span(w_1, w_2, w_3)$ che abbiamo caratterizzato come i vettori di $\mathbb{R}^4$ per cui la somma delle coordinate fa 0 (e per e_1 la somma delle coordinate fa 1). Ma chi è $Im(f^2)$? È banalmente $f(Imf)$ che per quanto visto nell'Esercizio 3 di questa esercitazione è contenuto in Imf, ovvero $Im(f^2) \subset Im(f)$ e, poiché $e_1 \notin Imf$ per quanto detto poco fa, $e_1 \notin Im(f^2)$. Quindi neanche questa quarta condizione può essere rispettata. In particolare anche i vettori di $Im(f^2)$ dovranno avere la somma delle coordinate uguale a 0.

$v)$ Vogliamo allora capire come è fatta $Im(f^2)$, o meglio, vogliamo scoprire la sua dimensione: per quanto visto nell'Esercizio 3 di questa esercitazione si ha che

$$dimIm(f^2) = dimIm(f \circ f) = dimImf - dim(Imf \cap Kerf)$$

Sappiamo già che $dimImf = 3$ per i punti precedenti. Ma sappiamo anche che $dimKerf = 1$, quindi $Imf \cap Kerf$ ha dimensione al massimo 1, quindi $Im(f^2)$ avrà dimensione al minimo $3 - 1 = 2$. Possiamo dunque già escludere la possibilità che $dimIm(f^2) = 1$. Mostriamo invece che è possibile soddisfare la richiesta $dimIm(f^2) = 2$: si ha che $dimIm(f^2) = 2 \Longrightarrow dim(Imf \cap Kerf) = 1$, ma dato che $Imf \cap Kerf \subset Kerf$, per contenimento e uguaglianza dimensionale si deve avere $Imf \cap Kerf = Kerf$ che vale se e solo se $Kerf \subset Imf$. Per mostrare quindi che questa seconda richiesta può essere soddisfatta basta dare un esempio di una f che abbia il nucleo contenuto nell'immagine. Per farlo, dovremo dare i valori su una base, tuttavia la base scelta all'inizio è poco funzionale in questo caso (non è evidente chi è il nucleo)... deve essere cambiata! Cambiarla significa semplicemente cambiare il quarto vettore (i primi tre sono fissi!): sia $\{v_1, v_2, v_3, x\}$ la nuova base , dove x è un vettore che dobbiamo ancora identificare tale che $x \notin Span(v_1, v_2, v_3)$ e che decidiamo di mandare a 0 tramite f, ovvero $f(x) = 0$ (questa scelta è dettata dal fatto che se $f(x) = 0$ allora $Span(x) \subset Kerf$, ma entrambi hanno dimensione 1 e quindi $Span(x) = Kerf$, sappiamo così immediatamente chi è il nucleo). Notiamo che questo non altera le altre condizioni in quanto $0 \in Span(w_1, w_2, w_3)$ e l'immagine continua ad avere dimensione 3. Ma tale x non può essere casuale: affinché $dimIm(f^2) = 2$ necessariamente abbiamo stabilito che $Kerf \subset Imf$, quindi, poiché $x \in Kerf$ si deve cercare x in Imf (ecco che e_1 non va bene). Scegliamo allora un vettore di $Imf = Span(w_1, w_2, w_3)$ per completare $\{v_1, v_2, v_3\}$ a base: un esempio di vettore che appartiene a Imf ma non appartiene a $Span(v_1, v_2, v_3)$ è ad esempio

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

infatti appartiene a Imf in quanto la somma delle coordinate fa 0, ma non appartiene a $Span(v_1, v_2, v_3)$ in quanto la prima e la seconda coordinata sono diverse. Allora $\{v_1, v_2, v_3, x\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$. In più, dato che abbiamo imposto che $f(x) = 0$, si ha che $Kerf = Span(x)$. La nuova applicazione è quella che associa nel modo i seguente i vettori della base:

$$v_1 \mapsto w_1$$

$$v_2 \mapsto w_2$$

$$v_3 \mapsto w_3$$

$$x \mapsto 0$$

Verifichiamo che fino ad ora la f che abbiamo appena definito rispetta tutte le proprietà: manda v_1 in w_1, v_2 in w_2 e v_3 in w_3. L'immagine ha dimensione 3. $Kerf \subset Span(w_1, w_2, w_3)$ in quanto $Kerf = Span(x) \subset Imf$. Si ha infine che $dimIm(f^2) = 2$.

$vi)$ Richiediamo ora che il vettore $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ appartenga a $Im(f^2)$. In questo caso non possiamo applicare il ragionamento di prima perché $u \in Imf$ in quanto la somma delle coordinate fa 0. Notiamo che anche in questo caso l'unica cosa che fa cambiare la f è solo

la scelta dell'ultimo vettore nel completamento a base.
Cosa sappiamo su $Im(f^2)$ (notiamo che sappiamo già che $dimIm(f^2) = 2$ e quindi se troviamo due vettori di $Im(f^2)$ linearmente indipendenti conosciamo una sua base e sappiamo tutto su questo sottospazio). Conosciamo qualche vettore in $Im(f^2)$? Per rispondere analizziamo l'intersezione tra Imf e $Span(v_1, v_2, v_3)$ (se un vettore y appartiene a $Span(v_1, v_2, v_3)$ allora lo sappiamo scrivere come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 e se appartiene anche a Imf allora sappiamo quanto vale $f(y)$). Notiamo innanzitutto che $Imf + Span(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^4$ in quanto sia Imf che $Span(v_1, v_2, v_3)$ hanno dimensione 3 e sono distinti, quindi la loro somma ha dimensione maggiore di 3 (essendo sottospazi di $\mathbb{R}^4$, la dimensione della loro somma è 4). Ma per Grassmann si ha che

$$dim(Imf + Span(v_1, v_2, v_3)) = dimImf + dimSpan(v_1, v_2, v_3) - dim(Imf \cap Span(v_1, v_2, v_3))$$

ovvero

$$dim(Imf \cap Span(v_1, v_2, v_3)) = 3 + 3 - 4 = 2$$

ovvero l'intersezione ha dimensione 2. Cerchiamo di capire chi è $Imf \cap Span(v_1, v_2, v_3)$ (abbiamo fatto questo tipo esercizi per gran parte dell'esercitazione del 29-10): avendo già entrambi i sottospazi espressi con equazioni si ha:

$$Imf \cap Span(v_1, v_2, v_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x = y,\ x + y + z + t = 0 \right\}$$

ci basta allora scegliere due (che è la dimensione) vettori linearmente indipendenti appartenenti a quest'intersezione per trovare una base dell'intersezione stessa. Scegliamo (arbitrariamente) i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = z_1, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = z_2$$

che sono indipendenti per la posizione degli zeri. Si ha quindi che $Imf \cap Span(v_1, v_2, v_3) = Span(z_1, z_2)$. Ma poiché sia z_1 che z_2 appartengono a $Span(v_1, v_2, v_3)$ si ha che esiste una combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 che è uguale a z_1 e z_2, in particolare: $z_1 = -v_2 + 2v_3$ e $z_2 = -v_2 + v_3$. Ma allora so anche la loro immagine:

$$f(z_1) = f(-v_2 + 2v_3) = -f(v_2) + 2f(v_3) = -w_2 + 2w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$f(z_2) = f(-v_2 + v_3) = -f(v_2) + f(v_3) = -w_2 + w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Questi due vettori stanno in Imf, ma stanno anche in $Im(f^2)$ in quanto precedentemente si aveva che $z_1, z_2 \in Imf$. Per di più sono linearmente indipendenti in quanto non sono chiaramente uno multiplo dell'altro e quindi si sa che $Im(f^2) = Span(f(z_1), f(z_2))$. Quindi chiedersi se $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ può appartenere a $Im(f^2)$ coincide col verificare se tale vettore appartiene o meno a $Span(f(z_1), f(z_2))$: la risposta è chiaramente no, in quanto sia $f(z_1)$ che $f(z_2)$ hanno la terza coordinata nulla (e quindi una qualsiasi loro combinazione lineare), mentre il vettore di sopra ha la terza coordinata uguale a 1. Si ha così che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \notin Im(f^2)$$

e quindi la sesta richiesta non può essere soddisfatta.
N.B. L'immagine di f^2 non è a caso, anzi, dipende esplicitamente da tutte le considerazioni fatte finora. Quindi questa, più che essere una richiesta, era una vera e propria verifica!

vii) Cerchiamo di capire dove varia

$$f(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$$

Ci conviene in questo caso cambiare base di partenza: in particolare ci conviene procedere come Grassmann: trovare una base dell'intersezione $Imf \cap Span(v_1, v_2, v_3)$ e completarla successivamente a base di $\mathbb{R}^4$. Una base di $Imf \cap Span(v_1, v_2, v_3)$ è data dall'insieme $\{z_1, z_2\}$. Per completare questo insieme a base di $Span(v_1, v_2, v_3)$ ci basta aggiungere un vettore linearmente indipendente da z_1, z_2. Per completare questo insieme a base di $Imf = Span(w_1, w_2, w_3)$ ci basta aggiungere un vettore linearmente indipendente da z_1, z_2. Prendiamo l'insieme z_1, z_2, linearmente indipendente e completiamolo a base di $Span(v_1, v_2, v_3)$: aggiungiamo un elemento di $Span(v_1, v_2, v_3)$ che non appartiene a $Span(z_1, z_2)$, un esempio è v_1 (non soddisfa l'equazione di appartenenza a $Span(w_1, w_2, w_3)$). Completiamolo ora a base di Imf: aggiungiamo un elemento di $Span(w_1, w_2, w_3)$ che non appartiene a $Span(z_1, z_2)$, un esempio è w_2 (non soddisfa l'equazione di appartenenza a $Span(v_1, v_2, v_3)$). Per motivi teorici (legati alla dimostrazione della formula di Grassmann) allora $\{v_1, z_1, z_2, w_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$. Vediamo dove vanno i vettori della base appena trovata quando gli si applica la f:

$$v_1 \mapsto w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z_1 \mapsto f(z_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$z_2 \mapsto f(z_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dove va invece w_2? Dato che $w_2 \in Imf$, si sa che $f(w_2) \in Im(f^2)$, che conosciamo in quanto è $Span(f(z_1), f(z_2))$. Tentiamo di scrivere questo sottospazio con le equazioni (poiché ha dimensione 2 ci aspettiamo che ci saranno 2 equazioni): sicuramente l'equazione dell'immagine deve essere soddisfatta, in quanto $Im(f^2) = Span(f(z_1), f(z_2)) \subset Imf$. Inoltre la terza componente deve sempre essere nulla. Si ha quindi:

$$Span(f(z_1), f(z_2)) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + y + z + t = 0,\ z = 0 \right\}$$

Ma quindi, poiché $f(w_2)$ deve rispettare le equazioni, sarà qualcosa del tipo:

$$f(w_2) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ -x - y \end{pmatrix}$$

al variare di $x, y \in \mathbb{R}^4$. Per capire allora dove va $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tramite f, mi basterà scrivere una combinazione lineare di v_1, z_1, z_2, w_2 che genera tale vettore. Con semplici passaggi algebrici la combinazione cercata è:

$$\begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\end{pmatrix} = v_1 + z_1 - 2w_2$$

Ma allora:

$$f(\begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\end{pmatrix}) = f(v_1+z_1-2w_2) = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-1\\0\\-2\end{pmatrix} -2\begin{pmatrix}x\\y\\0\\-x-y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-1\\-1\\-2\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-2x\\-1-2y\\-1\\-2+2x+2y\end{pmatrix}$$

Quindi l'immagine di $\begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ non può essere arbitraria, ma deve avere quella particolare forma.

Se si vuole scrivere il sottospazio a cui appartiene $f(\begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\end{pmatrix})$ in un modo un po' più elegante lo si può vedere come:

$$f(\begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\end{pmatrix}) \in \begin{pmatrix}4\\-1\\-1\\-2\end{pmatrix} + Span(\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\2\end{pmatrix})$$

ovvero il traslato rispetto a $\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ del sottospazio generato da $\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\2\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\2\end{pmatrix}$ (quello che tra un po' si chiamerà "sottospazio affine").

Dal momento che la condizione *vii*) ci dava una scelta tra due possibili vettori immagine, dobbiamo verificare se quei due vettori sono nella forma richiesta: ci chiediamo se $\begin{pmatrix}2\\1\\-3\\0\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}4\\-1\\-1\\-2\end{pmatrix} + Span(\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\2\end{pmatrix})$. La risposta è no, infatti in $Span(\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\2\end{pmatrix})$ troviamo vettori la cui terza coordinata è nulla, quindi in $\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\\-2\end{pmatrix} + Span(\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\2\end{pmatrix})$ troviamo solo vettori in cui la terza coordinata è uguale a -1. Dato che nel nostro vettore la terza coordinata è uguale a -3, esso non può appartenere all'insieme che contiene $f(\begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\end{pmatrix})$.

Ci chiediamo allora se $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}4\\-1\\-1\\-2\end{pmatrix} + Span(\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\2\end{pmatrix})$ (in questo caso la terza coordinata va bene). Un elemento di $\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\\-2\end{pmatrix} + Span(\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\2\end{pmatrix})$ è della forma

$$\begin{pmatrix}4-2x\\-1-2y\\-1\\-2+2x+2y\end{pmatrix}$$

, quindi, per scoprire se il nostro vettore candidato appartiene all'insieme dovremmo capire se esistono $x, y \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} 4-2x \\ -1-2y \\ -1 \\ -2+2x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che dà vita al sistema lineare:

$$\begin{cases} 4-2x & = 0 \\ -1-2y & = 1 \\ -1 & = -1 \\ -2+2x+2y & = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione $x = 2$, $y = -1$. Quindi il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ può essere immagine del vettore $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Inoltre sappiamo dove dobbiamo mandare il vettore w_2 tramite f: sostituendo $x = 2$, $y = -1$ nell'immagine di w_2 otteniamo:

$$w_2 \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = f(w_2)$$

Abbiamo così definito un'unica applicazione lineare (abbiamo dato i valori su una base) che rispetta il maggior numero di richieste contemporaneamente e nell'ordine. In particolare, per riassumere il tutto, l'applicazione è quella che manda i vettori v_1, z_1, z_2, w_2 (che formano una base di $\mathbb{R}^4$) nei vettori:

$$v_1 \mapsto w_1$$
$$z_1 \mapsto f(z_1)$$
$$z_2 \mapsto f(z_2)$$
$$w_2 \mapsto f(w_2)$$

Verifichiamo che effettivamente rispetta tutte le richieste:

i) $f(v_1) = w_1$ perché ce lo dice la base. Troviamo v_2 in termini di v_1, z_1, z_2, w_2: con semplici passaggi algebrici otteniamo che $v_2 = z_1 - 2z_2$ e quindi

$$f(v_2) = f(z_1 - 2z_2) = w_2$$

Troviamo v_3 in termini di v_1, z_1, z_2, w_2: con semplici passaggi algebrici otteniamo che $v_3 = -z_1 + z_2$ e quindi

$$f(v_3) = f(-z_1 + z_2) = w_3$$

Troviamo v_4 in termini di v_1, z_1, z_2, w_2: con semplici passaggi algebrici otteniamo che $v_4 = v_1 - z_1$ e quindi

$$f(v_4) = f(v_1 - z_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Quindi la prima condizione è soddisfatta.

ii) $Imf = Span(w_1, f(z_1), f(z_2), f(w_2))$. Ma notiamo che $f(z_2) = f(w_2)$, quindi lo *Span* di riduce a $Span(w_1, f(z_1), f(z_2))$ (ovvero $Span(w_1, f(z_1), f(z_2), f(w_2)) = Span(w_1, f(z_1), f(z_2))$) che sono indipendenti in quanto $f(z_1) \notin Span(w_1)$ e $f(z_2) \notin Span(w_1, f(z_1))$ in quanto la seconda e quarta coordinata dipendono solo da $f(z_1)$ e non possono quindi essere uguali.

Dunque $dim Im f = 3$.

$iii), iv)$ Non erano soddisfatta a prescindere.

$v)$ Dobbiamo mostrare che $Ker f \subset Im f$: notiamo che

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha(f(z_2) - f(w_2)) = f(\alpha(z_2 - w_2))$$

quindi si ricava da ciò che

$$Span(z_2 - w_2) = Ker f$$

(ricordiamo che il nucleo è unidimensionale per la formula di nucleo e immagine). Ci basta mostrare che $Span(z_2 - w_2) \subset Span(w_1, f(z_1), f(z_2))$, e questo succede se e solo se $z_2 - w_2 \in Span(w_1, f(z_1), f(z_2))$ e ciò è vero in quanto:

$$z_2 - w_2 = -w_1 + f(z_2)$$

$vi)$ Verifichiamo che il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ non appartiene a $Im(f^2)$. Dato che per il punto $v)$ $dim Im(f^2) = 2$ e per il ragionamento del punto $vi)$ $Im(f^2) = Span(f(z_1), f(z_2))$ abbiamo già verificato che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \notin Im(f^2)$$

(non c'è bisogno di fare molte verifiche in quanto dal punto $vi)$ compaiono i vettori z_1, z_2).

$vii)$ Non c'è bisogno di verifiche.

8 Esercitazione 23-11-2021

8.1 Esercizio 1

Siano $A, B, C, D \in M(2, \mathbb{R})$ definite da:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ci chiediamo se sono un insieme di generatori di $M(2, \mathbb{R})$.

Soluzione: un problema del genere può essere risolto in tantissimi modi. Mostriamo in questa esercitazione un metodo alternativo che sfrutta gli isomorfismi di passaggio alle coordinate per trasferire il problema da $M(2, \mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^4$ ($\mathbb{R}^4$ in quanto $dim M(2, \mathbb{R}) = 2^2 = 4$). Infatti, per quanto visto a teoria, se $A \subset V$ è un insieme di generatori per il $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V (di dimensione n) e $f : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$ è un isomorfismo, allora $f(A) \subset \mathbb{K}^n$ è un insieme di generatori per $\mathbb{K}^n$.

L'isomorfismo di passaggio alle coordinate prevede che si abbia una base in partenza: sia allora $B = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ la base canonica di $M(2, \mathbb{R})$ e consideriamo l'isomorfismo $[\,]_B : M(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Scriviamo ora le 4 matrici A, B, C e D come combinazione lineare di $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$:

$$A = E_{11} + 2E_{12} + 0E_{21} + E_{22}$$
$$B = 0E_{11} + 3E_{12} + 0E_{21} + E_{22}$$
$$C = -E_{11} + E_{12} - E_{21} - E_{22}$$
$$D = 0E_{11} + 0E_{12} + E_{21} + E_{22}$$

Ma allora con l'isomorfismo di passaggio nella base B avremo:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \left[\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ci chiediamo allora se questi 4 vettori generano $\mathbb{R}^4$. Dal momento che sono 4 (tanti quanto è $dim\mathbb{R}^4$) se generano sono anche una base: sono allora linearmente indipendenti e il loro *Span* ha dimensione 4. Ma definendo E come la matrice che ha per colonne i 4 vettori di sopra, si ha per teoria che

$$Im(E) = Im \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Possiamo allora vedere se la matrice E ha rango massimo (=4) o meno: il rango lo calcoliamo con l'algoritmo di Gauss. Utilizziamo Gauss-righe (ricordiamo che $rnk(E) = 4 \iff G_R(E)$ ha 4 pivot): cerchiamo la prima colonna non nulla: è la prima. Cerchiamo nella prima colonna il primo elemento non nullo che è l'elemento di posto $1, 1$. Adesso sottraiamo alla seconda riga il doppio della prima e alla quarta riga sottraiamo la prima:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \mapsto R_4 - R_1]{R_2 \mapsto R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Riapplichiamo adesso l'algoritmo di Gauss-righe alla sottomatrice ottenuta "scartando" la prima riga (che abbiamo appena sistemato): cerchiamo la prima colonna non nulla: è la seconda. Cerchiamo nella seconda colonna il primo elemento non nullo che è l'elemento di posto $2, 2$. Dal momento che in questa posizione c'è un 3 (e noi vogliamo che ci sia un

1), moltiplichiamo la riga per $\frac{1}{3}$. Adesso sottraiamo alla quarta riga la seconda riga (già moltiplicata per $\frac{1}{3}$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \mapsto \frac{1}{3}R_2]{R_4 \mapsto R_4 - \frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Riapplichiamo adesso l'algoritmo di Gauss-righe alla sottomatrice ottenuta "scartando" le prime due righe (che abbiamo appena sistemato): cerchiamo la prima colonna non nulla: è la terza. Cerchiamo nella terza colonna il primo elemento non nullo che è l'elemento di posto $3,3$. Dal momento che in questa posizione c'è un 3 (e noi vogliamo che ci sia un 1), moltiplichiamo la riga per -1. Adesso sommiamo alla quarta riga la terza riga (già moltiplicata per-1):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \mapsto \frac{-}{R}3]{R_4 \mapsto R_4 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'algoritmo di Gauss-righe termina qui, in quanto non è più possibile ridurre la matrice: essa è a scalini. La matrice ottenuta ha 3 pivot (nelle posizioni $1,1,\ 2,2,\ 3,3$), da cui si ottiene che

$$rnk(E) = 3 \Longrightarrow dimIm(E) = 3 \Longrightarrow dimSpan(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = 3$$

Ma allora i 4 vettori generano uno spazio di dimensione di 3 dentro a $\mathbb{R}^4 \Longrightarrow$ i 4 vettori non generano $\mathbb{R}^4 \Longrightarrow$ le 4 matrici A, B, C, D non generano $M(2, \mathbb{R})$.

Osservazione: grazie a Gauss-righe possiamo anche capire quale dei 4 vettori dipende dagli altri 3. Infatti, guardando le colonne contenenti pivot, si ha che la prima, la seconda e la terza colonna di E sono indipendenti, ovvero che il primo, il secondo e il terzo vettore sono indipendenti, mentre il quarto vettore appartiene allo *Span* dei primi 3. Inoltre, poiché per ragioni teoriche un isomorfismo manda insiemi linearmente indipendenti in insiemi linearmente indipendenti, si ha anche che le matrici A, B, C sono linearmente indipendenti, mentre D dipende dalle altre 3.

8.2 Esercizio 2

Sia $V = \mathbb{R}_3[t]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ di grado minore o uguale a 3 e siano $p_1 = 1 + t + t^2 - t^3$, $p_2 = 2 - t^2 - t^3$ e $p_3 = t + 2t^2 + 2t^3$. Stabilisci se sono linearmente indipendenti.

Soluzione: Come prima, usiamo un metodo alternativo rispetto al solito, ovvero verifichiamo l'indipendenza lineare tramite l'isomorfismo di passaggio alle coordinate che va da $\mathbb{R}_3[t]$ in $\mathbb{R}^4$ (hanno la stessa dimensione). Scegliamo dunque una base in partenza: prendiamo la base $B = \{t^3, t^2, t, 1\}$ e consideriamo l'isomorfismo $[\ ]_B : \mathbb{R}_3[t] \longrightarrow \mathbb{R}^4$. Scriviamo ora i 3 polinomi come combinazione lineare di elementi di $\{t^3, t^2, t, 1\}$:

$$p_1 = -1t^3 + 1t^2 + 1t + 1$$

$$p_2 = -1t^3 - 1t^2 + 0t + 2$$

$$p_3 = 2t^3 + 2t^2 + 1t + 0$$

Ma allora con l'isomorfismo di passaggio alle coordinate in base B avremo:

$$[p_1]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ [p_2]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ [p_3]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ci chiediamo allora se i 3 vettori di $\mathbb{R}^4$ scritti sopra sono linearmente indipendenti. Notiamo che $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\\0\end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti se e solo se

$$dimSpan(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\\0\end{pmatrix}) = 3$$

e questo succede se e solo se la matrice A, che ha per colonne i 3 vettori di sopra, ha rango pari a 3, ovvero se

$$rnk(A) = dimIm\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\1 & -1 & 2\\1 & 0 & 1\\1 & 2 & 0\end{pmatrix} = 3$$

Applichiamo l'algoritmo di Gauss-colonne su questa matrice. Cerchiamo la prima riga non nulla: è la prima. Cerchiamo nella prima riga non nulla il primo elemento non nullo: è l'elemento di posto $1, 1$. Dal momento che in questa posizione c'è un -1 (e noi vogliamo che ci sia un 1), moltiplichiamo la colonna per -1. Adesso sommiamo alla seconda colonna la prima colonna (già moltiplicata per -1) e sottraiamo alla seconda colonna 2 volte la prima (già moltiplicata per -1):

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\1 & -1 & 2\\1 & 0 & 1\\1 & 2 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[C_1\mapsto -C_1]{C_3\mapsto C_3+2C_1,\ C_2\mapsto C_2-C_1} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & -2 & 4\\-1 & -1 & 3\\-1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Riapplichiamo adesso l'algoritmo di Gauss-colonne alla sottomatrice ottenuta "scartando" la prima colonna (che abbiamo appena sistemato): cerchiamo la prima riga non nulla: è la seconda. Cerchiamo nella seconda riga il primo elemento non nullo che è l'elemento di posto $2, 2$. Dal momento che in questa posizione c'è un -2 (e noi vogliamo che ci sia un 1), moltiplichiamo la colonna per $-\frac{1}{2}$. Adesso sottraiamo alla terza colonna la seconda (già moltiplicata per $\frac{1}{3}$) moltiplicata per 4:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & -2 & 4\\-1 & -1 & 3\\-1 & 1 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[C_2\mapsto -\frac{1}{2}C_2]{C_3\mapsto C_3+2C_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0\\-1 & \frac{1}{2} & 1\\-1 & -\frac{1}{2} & 4\end{pmatrix}$$

L'algoritmo di Gauss-colonne termina qui, in quanto non è più possibile ridurre la matrice: essa è a scalini. La matrice ottenuta ha 3 pivot (nelle posizioni $1, 1,\ 2, 2,\ 3, 3$), da cui si ottiene che

$$rnk(A) = 3 \Longrightarrow dimIm(A) = dimSpan(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\\0\end{pmatrix}) = 3$$

Ma allora i 3 vettori sono linearmente indipendenti, in quanto lo spazio da loro generato ha dimensione 3 (ovvero sono una base di tale spazio) $\Longrightarrow$ tramite l'isomorfismo (che manda insiemi linearmente indipendenti in insiemi linearmente indipendenti) possiamo affermare che p_1, p_2, p_3 sono linearmente indipendenti.

8.3 Esercizio 3

Siano V, V', W, W' $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e siano $f : V \longrightarrow W$, $g : V' \longrightarrow W'$, $h : V \longrightarrow V'$ e $l : W \longrightarrow W'$ quattro applicazioni lineari tali che il diagramma seguente

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & W \arrow[d, "l"] \\ V' \arrow[r, "g"'] & W' \end{tikzcd}$$

commuti (ovvero $l \circ f = g \circ h$). Si dimostri che $h(Kerf) \subset Kerg$ e che $l(Imf) \subset Img$, e in particolare che se h e l sono isomorfismi allora si ha uguaglianza (non contenimento).

Dimostrazione. Dimostriamo il primo contenimento. Sia $v \in Kerf$, devo dimostrare fondamentalmente che $g(h(v)) = 0$. Ma quest'ultima espressione $g(h(v))$ la possiamo vedere come $(g \circ h)(v)$, ma poiché $g \circ h = l \circ f$ per commutatività, si ha che $g(h(v)) = l(f(v))$, ma dato che $v \in Kerf$, $f(v) = 0$, quindi $g(h(v)) = l(f(v)) = l(0) = 0$, ovvero $h(v) \in Kerg$, che significa $h(Kerf) \subset Kerg$.
Mostriamo ora l'altra inclusione: sia $w \in Imf$, allora $\exists\, v \in V$ tale che $w = f(v)$. Valutiamo $l(w)$: $l(w) = l(f(v))$, ma poiché $l \circ f = g \circ h$ per commutatività, si ha che $l(f(v)) = g(h(v))$ che è chiaramente un elemento di Img, ovvero $l(Imf) \subset Img$.

Per dimostrare ora le uguaglianze ci basta dimostrare le inclusioni opposte (una è già stata dimostrata). Dimostriamo quindi che se h e l sono isomorfismi allora $Kerg \subset h(Kerf)$ e $Img \subset l(Imf)$. Cominciamo con la prima: sia $v' \in Kerg \subset V'$. Dato che h è un isomorfismo, è in particolare surgettiva, e quindi $v' \in Imh$: allora $\exists v \in V$ tale che $h(v) = v'$. Basta allora dimostrare che $v \in Kerf$, in questo modo si avrà che h applicato a un elemento del nucleo di f contiene v' che è un elemento di $Kerg$. Ci chiediamo allora se $f(v) = 0$. Possiamo applicare l a questo elemento: $l(f(v)) = g(h(v)) = g(v') = 0$, quindi $f(v) \in Kerl$, ma l è un isomorfismo, in particolare è iniettiva, e quindi $Kerl = \{0\} \implies f(v) = 0$. Dunque $v \in Kerf$ e $v' \in h(Kerf)$ che implica $Kerg \subset h(Kerf)$. Dal doppio contenimento segue l'uguaglianza.
Vediamo ora l'altro: Sia $w' \in Img \subset W'$, allora $\exists v' \in V'$ tale che $w' = g(v')$, ma dato che h è un isomorfismo, $\exists v \in V$ tale che $h(v) = v'$. Dunque $w' = g(h(v)) = l(f(v))$ che è chiaramente un elemento di $l(Imf)$. Dunque $w' \in l(Imf) \implies Img \subset l(Imf)$. Dal doppio contenimento segue l'uguaglianza.

Questo esercizio ha un'utilità grande: se consideriamo l e h isomorfismi di passaggio alle coordinate, possiamo ottenere tante informazioni sulle applicazioni f e g. In particolare è molto utile utilizzare gli isomorfismi di passaggio quando si ha a che fare con spazi vettoriali complessi, per passare studiare la stessa situazione in spazi più semplici.
In particolare se $B \subset V$ è una base di V e $D \subset W$ è una base di W, e $dimV = n$ e $dimW = m$, allora il diagramma seguente

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "B"'] & W \arrow[d, "D"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "g"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

commuta (dove $B = [\ ]_B$ e $D = [\ ]_D$) e in particolare $[\ ]_B(Kerf) = Ker(L_{M_D^B(f)}) = Ker(M_D^B(f))$ e $[\ ]_D(Imf) = Im(L_{M_D^B(f)}) = Im(M_D^B(f))$, dove se $B = \{v_1, ..., v_n\}$ si ha

$$M_B^D(f) = ([f(v_1)]_D \,|...|\, [f(v_n)]_D)$$

In particolare studiando nucleo e immagine della matrice associata a f nelle basi B e D troviamo informazioni su nucleo e immagine di f. In più $dimKerf = dimKer(M_D^B(f))$ e $dimImf = rnk(f) = rnk(M_D^B(f))$ (ricordiamo che le applicazioni iniettive preservano le dimensioni).

8.4 Esercizio 4

Sia $f : \mathbb{R}_4[t] \longrightarrow M(2, \mathbb{R})$ che manda il polinomio p in:

$$p \mapsto \begin{pmatrix} p(1) & p(-1) \\ p'(1) & p'(-1) \end{pmatrix}$$

dove con p' indichiamo la derivata di prima di p. Dimostrare che f è lineare e trovare $Kerf$ e Imf.

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto una cosa: la derivata $D : \mathbb{K}[t] \longrightarrow \mathbb{K}[t]$ che associa a $p \mapsto p'$ è un'applicazione lineare. Per di più la derivata del monomio t^k con $k \geq 0$ è $D(t^k) = kt^{k-1}$ e poiché l'insieme $\{1, t, ..., t^k, ...\}$ è una base di $\mathbb{K}[t]$ conosciamo i valori

dell'applicazione derivata su una base $\Longrightarrow$ conosciamo i valori della derivata per qualsiasi polinomio.
Possiamo allora considerare l'applicazione nel seguente modo

$$p \mapsto \begin{pmatrix} val_1(p) & val_{-1}(p) \\ (val_1 \circ D)(p) & (val_{-1} \circ D)(p) \end{pmatrix}$$

quindi le 4 entrate della matrice sono 4 applicazioni lineari che mandano un polinomio di $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}$. Consideriamo allora il caso più generale: sia $F : \mathbb{R}_4[t] \longrightarrow M(2, \mathbb{R})$ che manda il polinomio p in:

$$p \mapsto \begin{pmatrix} f_1(p) & f_2(p) \\ f_3(p) & f_4(p) \end{pmatrix}$$

dove $f_i : \mathbb{R}_4[t] \longrightarrow \mathbb{R}$ sono lineari $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Dimostriamo allora che F è lineare:

· Additività: Siano $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^4[t]$, allora:

$$F(p_1 + p_2) = \begin{pmatrix} f_1(p_1 + p_2) & f_2(p_1 + p_2) \\ f_3(p_1 + p_2) & f_4(p_1 + p_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(p_1) + f_1(p_2) & f_2(p_1) + f_2(p_2) \\ f_3(p_1) + f_3(p_2) & f_4(p_1) + f_4(p_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(p_1) & f_2(p_1) \\ f_3(p_1) & f_4(p_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(p_2) & f_2(p_2) \\ f_3(p_2) & f_4(p_2) \end{pmatrix} = F(p_1) + F(p_2)$$

· Omogeneità: Sia $\mu \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}[t]$, allora:

$$F(\mu p) = \begin{pmatrix} f_1(\mu p) & f_2(\mu p) \\ f_3(\mu p) & f_4(\mu p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu f_1(p) & \mu f_2(p) \\ \mu f_3(p) & \mu f_4(p) \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} f_1(p) & f_2(p) \\ f_3(p) & f_4(p) \end{pmatrix} = \mu F(p)$$

Questo dimostra che anche la f di partenza, che era un caso generale di questo, è lineare.

Dimostrata la linearità di f vogliamo trovarne nucleo e immagine (ancora con l'isomorfismo di passaggio): consideriamo $B = \{1, t, t^2, t^3, t^4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e $D = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$. Troviamo la matrice $M_D^B(f)$ associata alla f: troviamo quindi prima le colonne di $M_D^B(f)$. Vediamo dove vanno gli elementi della base tramite f:

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1E_{11} + 1E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22}$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1E_{11} - 1E_{12} + 1E_{21} + 1E_{22}$$

$$t^2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 1E_{11} + 1E_{12} + 2E_{21} - 2E_{22}$$

$$t^3 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 1E_{11} - 1E_{12} + 3E_{21} + 3E_{22}$$

$$t^4 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = 1E_{11} + 1E_{12} + 4E_{21} - 4E_{22}$$

e quindi $M_D^B(f)$ è la matrice che ha per colonne le coordinate delle immagini rispetto alla base D:

$$[f(1)]_D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ [f(t)]_D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ [f(t^2)]_D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \ [f(1)]_D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \ [f(t^4)]_D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$M_D^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Da questa matrice associata adesso possiamo capire tutto quello che vogliamo su f.

Apriamo una lunga parentesi: qual è il significato della matrice associata a f? La matrice $M_D^B(f)$ è quella matrice tale che $[f(v)]_D = M_D^B(f) \cdot [v]_B$, ovvero è la matrice che in output dà un vettore le cui coordinate rappresentano i coefficienti della combinazione lineare che genera $f(v)$ nella base D. Per esempio: Quanto vale $F(t^4 - t^3 + 2t - 3)$? Dato che

$$[t^4 - t^3 + 2t - 3]_B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dove $B = \{1, t, t^2, t^3, t^4\}$, si ha che

$$[F(t^4 - t^3 + 2t - 3)]_D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

dove $D = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$. Ma allora

$$F(t^4 - t^3 + 2t - 3) = -E_{11} - 3E_{12} + 3E_{21} - 5E_{22} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Torniamo al nostro esercizio: cerchiamo $Kerf = Ker(M_D^B(f))$. Consideriamo l'applicazione $L_{M_D^B(f)} : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, per quanto visto nell'Esercizio 3 di quest'esercitazione si ha che $Ker(M_D^B(f)) = [\ ]_B(Kerf)$ e $Im(M_D^B(f)) = [\ ]_D(Imf)$. Cerchiamo $Ker(M_D^B(f))$: per trovare chi è il nucleo bisogna risolvere il sistema lineare generato da

$$M_D^B(f) \cdot x = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 & = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 & = 0 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 & = 0 \end{cases}$$

che ha sempre soluzione in quanto è omogeneo. Dobbiamo applicare l'algoritmo di Gauss-righe completo alla matrice $M_D^B(f)$ (non serve aggiungere la colonna dei termini noti in quanto sono tutti nulli!). Applichiamo dunque l'algoritmo: cerchiamo la prima colonna non nulla: è la prima. Cerchiamo il primo elemento della colonna non nullo: è l'elemento di posto $1, 1$. Vogliamo che il resto della colonna sia fatta di 0: sottraiamo alla seconda riga la prima:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \mapsto R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Riapplichiamo adesso l'algoritmo di Gauss-righe alla sottomatrice ottenuta "scartando" la prima riga (che abbiamo appena sistemato): cerchiamo la prima colonna non nulla: è la seconda. Cerchiamo nella seconda colonna il primo elemento non nullo che è l'elemento di posto $2, 2$. Dal momento che in questa posizione c'è un -2 (e noi vogliamo che ci sia un 1), moltiplichiamo la riga per $-\frac{1}{2}$. Adesso sottraiamo alla terza e alla quarta riga la seconda riga (già moltiplicata per $-\frac{1}{2}$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \mapsto -\frac{1}{2}R_2]{R_3 \mapsto R_3 + \frac{1}{2}R_1, R_4 \mapsto R_4 + \frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Riapplichiamo adesso l'algoritmo di Gauss-righe alla sottomatrice ottenuta "scartando" le prime due righe (che abbiamo appena sistemato): cerchiamo la prima colonna non nulla: è la terza. Cerchiamo nella terza colonna il primo elemento non nullo che è l'elemento di posto $3,3$. Dal momento che in questa posizione c'è un 2 (e noi vogliamo che ci sia un 1), moltiplichiamo la riga per $\frac{1}{2}$. Adesso sommiamo alla quarta riga il doppio della terza riga (già moltiplicata per $\frac{1}{2}$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \mapsto \frac{1}{2}R_3]{R_4 \mapsto R_4 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Dividiamo ora l'ultima riga per 4 e otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \mapsto \frac{1}{4}R_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo così ottenuto una matrice a gradini con 4 pivot. Ma allora $dimIm(M_D^B(f)) = 4$ e inoltre $Im((M_D^B(f)))$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4 \Longrightarrow Im(L_{M_D^B(f)}) = \mathbb{R}^4 \Longrightarrow L_{M_D^B(f)}$ è surgettiva e dunque Imf, che è la controimmagine tramite l'isomorfismo delle coordinate di $Im(M_D^B(f))$, è $M(2,\mathbb{R})$, ovvero anche f è surgettiva. Tornando al nucleo: per la formula di nucleo e immagine si ha che $dimKerf = dim\mathbb{R}_4[t] - dimImf = 5 - 4 = 1$. Quindi il nucleo è generato da un vettore: per scoprire chi è dobbiamo continuare con l'algoritmo di Gauss completo, che prevede di mettere degli 0 sopra i pivot. D'ora in poi scriverò le operazioni sopra le frecce:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \mapsto R_3 - R_4]{R_1 \mapsto R_1 - R_4, R_2 \mapsto R_2 - R_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \mapsto R_1 - R_3}$$

$$\xrightarrow{R_1 \mapsto R_1 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \mapsto R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Riscriviamo allora le equazioni che definiscono il nucleo di $M_D^B(f)$ con la nuova matrice:

$$\begin{cases} x_1 - x_5 & = 0 \\ x_2 & = 0 \\ x_3 + 2x_5 & = 0 \\ x_4 & = 0 \end{cases}$$

e trovando tutto in funzione di x_5 abbiamo:

$$\begin{cases} x_1 & = x_5 \\ x_2 & = 0 \\ x_3 & = -2x_5 \\ x_4 & = 0 \end{cases}$$

quindi un elemento qualsiasi del nucleo ha la forma seguente:

$$\begin{pmatrix} x_5 \\ 0 \\ -2x_5 \\ 0 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$Ker(M_D^B(f)) = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Vogliamo ora trovare $Kerf$: dato che gli isomorfismi mandano basi in basi (e il vettore di sopra è una base del nucleo di $M_D^B(f)$), riapplicando l'isomorfismo di passaggio alle coordinate invertito troviamo una base di $Kerf$:

$$Kerf = Span(\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_B^{-1}) = Span(1 - 2t^2 + t^4)$$

e quindi $Kerf = Span((t^2 - 1)^2)$.

Osservazione: la matrice iniziale $M_D^B(f)$ non è molto bella, poiché non ha molti zeri (diciamo che le matrici belle sono quelle con tanti zeri). Abbiamo infatti dovuto fare molte operazioni di riga per giungere alla conclusione. Questo perché la base di partenza (B) e la base di arrivo (D) che abbiamo scelto hanno poca attinenza con il problema. Se ad esempio costruissimo una base di $\mathbb{R}_4[t]$ che contiene il polinomio $q = t^4 - 2t^2 + 1$, la colonna ad esso corrispondente sarebbe una colonna di soli zeri, in quanto

$$f(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e le coordinate rispetto a una qualsiasi base saranno tutti 0.
Scegliamo allora una base diversa in partenza: sia $B' = \{(t^2 - 1)^2, t, t^2, t^3, t^4\}$ (notiamo che è una base in quanto abbiamo sostituito il polinomio a 1, che può essere scritto come $1 = (t^2 - 1)^2 - t^4 + 2t^2$). Ma allora la matrice associata nella nuova base ha come prima colonna:

$$[f((t^2 - 1)^2)]_D = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in quanto essendo D una base, l'unico modo per ottenere la matrice nulla è quello di avere tutti coefficienti nulli. Le altre colonne invece sono uguali a prima, in quanto non abbiamo cambiato la base d'arrivo. Quindi:

$$M_D^{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

che è una matrice molto più bella di $M_D^B(f)$ in quanto ha una colonna di soli zeri, che non verrà presa in considerazione nell'algoritmo di Gauss.
Il vero problema è riuscire a capire quale base conviene mettere :).

9 Esercitazione 26-11-2021

9.1 Esercizio 1, prosieguo Esercizio 4

Sia $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow M(2, \mathbb{R})$ che manda il polinomio p in:

$$p \mapsto \begin{pmatrix} p(1) & p(-1) \\ p'(1) & p'(-1) \end{pmatrix}$$

dove con p' indichiamo la derivata di prima di p. Se $B = \{1, t, t^2, t^3, t^4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ e $D = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ è una base di $M(2, \mathbb{R})$ abbiamo già verificato nell'Esercizio 4 della scorsa esercitazione che la matrice associata a f nelle basi B e D è:

$$M_D^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Abbiamo anche verificato che cambiando base in partenza $B' = \{(t^2 - 1)^2, t, t^2, t^3, t^4\}$ la nuova matrice associata è fatta come segue:

$$M_D^{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Ma come dipendono $M_D^B(f)$ e $M_D^{B'}(f)$ l'una dall'altra? Dal momento che si ottengono cambiando una base in partenza, per quanto visto a teoria la relazione tra le due è:

$$M_D^{B'}(f) = M_D^B(f) \cdot M_B^{B'}(id_{\mathbb{R}_4[t]})$$

e

$$M_D^B(f) = M_D^{B'}(f) \cdot M_{B'}^B(id_{\mathbb{R}_4[t]})$$

dove $M_B^{B'}(id_{\mathbb{R}_4[t]})$ e $M_{B'}^B(id_{\mathbb{R}_4[t]})$ sono matrici di cambio di base. Vogliamo trovare esplicitamente chi sono $M_B^{B'}(id_{\mathbb{R}_4[t]})$ e $M_{B'}^B(id_{\mathbb{R}_4[t]})$. Ricordiamo inoltre che

$$M_B^{B'}(id_{\mathbb{R}_4[t]}) = (M_{B'}^B(id_{\mathbb{R}_4[t]}))^{-1}$$

.
Siano allora $B = \{1, t, t^2, t^3, t^4\}$ e $B' = \{(t^2 - 1)^2, t, t^2, t^3, t^4\}$ le due basi. Troviamo prima la matrice $M_B^{B'}(id_{\mathbb{R}_4[t]})$: come è fatta questa matrice? La costruzione è analoga a ogni matrice associata a un'applicazione lineare: troviamo le colonne, applichiamo l'isomorfismo di passaggio alle coordinate e abbiamo la matrice. Troviamo le colonne:

$$(id_{\mathbb{R}_4[t]})((t^2 - 1)^2) = (t^2 - 1)^2 = t^4 - 2t^2 + 1 \Longrightarrow [t^4 - 2t^2 + 1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(id_{\mathbb{R}_4[t]})(t) = t \Longrightarrow [t]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ (id_{\mathbb{R}_4[t]})(t^2) = t^2 \Longrightarrow [t^2]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(id_{\mathbb{R}_4[t]})(t^3) = t^3 \Longrightarrow [t^3]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ (id_{\mathbb{R}_4[t]})(t^4) = t^4 \Longrightarrow [t^4]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$M_B^{B'}(id_{\mathbb{R}_4[t]}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo ora $M_{B'}^{B}(id_{\mathbb{R}_4[t]})$, con lo stesso ragionamento di prima, troviamo le colonne:

$$(id_{\mathbb{R}_4[t]})(1) = 1 \Longrightarrow [1]_{B'} = [(t^2-1)^2 + 2t^2 - t^4]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(id_{\mathbb{R}_4[t]})(t) = t \Longrightarrow [t]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ (id_{\mathbb{R}_4[t]})(t^2) = t^2 \Longrightarrow [t^2]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(id_{\mathbb{R}_4[t]})(t^3) = t^3 \Longrightarrow [t^3]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ (id_{\mathbb{R}_4[t]})(t^4) = t^4 \Longrightarrow [t^4]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$M_{B'}^{B}(id_{\mathbb{R}_4[t]}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Possiamo verificare la correttezza mostrando che sono l'una l'inversa dell'altra: il loro prodotto deve fare I_5:

$$M_{B'}^{B}(id_{\mathbb{R}_4[t]}) \cdot M_B^{B'}(id_{\mathbb{R}_4[t]}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$M_B^{B'}(id_{\mathbb{R}_4[t]}) \cdot M_{B'}^{B}(id_{\mathbb{R}_4[t]}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi sono effettivamente giuste in quanto l'una inversa dell'altra.
Mostriamo per di più dal punto di vista esplicito che $M_D^{B'}(f) = M_D^{B}(f) \cdot M_B^{B'}(id_{\mathbb{R}_4[t]})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2+1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1-2+1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -4+4 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4-4 & 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

che è effettivamente $M_D^{B'}(f)$

Cambiamo ora base in arrivo. Sia

$$D' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

una nuova base di $M(2,\mathbb{R})$ (abbiamo già trovato queste matrici: sono $f(1)$, $f(t)$, $f(t^2)$, $f(t^3)$ e dato che la f è surgettiva, questi 4 matrici generano in quanto le applicazioni surgettive mandano generatori in generatori). Cerchiamo la matrice $M^D_{D'}(id_{M(2,\mathbb{R})})$: troviamo le colonne (vi chiedo un atto di fede nelle combinazioni lineari che non avevo voglia di scrivere):

$$(id_{M(2,\mathbb{R})})(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Longrightarrow \Big[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Big]_{D'} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$$

$$(id_{M(2,\mathbb{R})})(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Longrightarrow \Big[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Big]_{D'} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$(id_{M(2,\mathbb{R})})(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \Longrightarrow \Big[\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Big]_{D'} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$(id_{M(2,\mathbb{R})})(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Longrightarrow \Big[\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Big]_{D'} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

e quindi la matrice $M^D_{D'}(id_{M(2,\mathbb{R})})$ è

$$M^D_{D'}(id_{M(2,\mathbb{R})}) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 2 & -1 & 1\\ 3 & -3 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Vogliamo dunque cercare la matrice associata a f nelle basi B e D' (ovvero partiamo da un polinomio, lo scriviamo con le coordinate in base B e otteniamo in output i coefficienti della combinazione lineare che genera l'immagine del polinomio tramite f nella base D'): per farlo sappiamo che basta moltiplicare $M^D_{D'}(id_{M(2,\mathbb{R})})$ per $M^B_D(f)$:

$$M^B_{D'}(f) = M^D_{D'}(id_{M(2,\mathbb{R})})\cdot M^B_D(f) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 2 & -1 & 1\\ 3 & -3 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Facciamo vedere ora che con il procedimento standard troviamo la stessa soluzione: costruiamo dunque $M^B_{D'}(f)$ nel modo tradizionale. Cerchiamo allora le colonne della matrice trovando le coordinate delle immagini della base B nella base D':

$$[f(1)]_{D'} = \Big[\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Big]_{D'} = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\ [f(t)]_{D'} = \Big[\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Big]_{D'} = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$[f(t^2)]_{D'} = \Big[\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\Big]_{D'} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\ [f(t^3)]_{D'} = \Big[\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 3\end{pmatrix}\Big]_{D'} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$[f(t^4)]_{D'} = \Big[\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -4\end{pmatrix}\Big]_{D'} = \Big[2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Big]_{D'} = \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$$

E quindi la matrice associata a f nelle basi B e D' è la matrice che ha per colonne i vettori che abbiamo trovato sopra:

$$M^B_{D'}(f) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

concordemente a quanto trovato sopra.
Citazione Manfre: "Morale della storia, non fate mai il cambio di base, è soltanto una perdita di tempo".

E ora la domandona: perché tutto 'sto casino? Per far vedere che cambiando basi, le matrici possono venire più o meno belle...

9.2 Esercizio 2

Siano

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x - y + z = 0 \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, y + z = 0 \right\}$$

Si costruisca, se esiste, oppure si dimostri che non esiste, una $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineare tale che:

· $f(U) \subset W$ e $f(W) \subset U$

· $f(e_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

· $dimV_2(f) = 2$, dove $V_2(f)$ è l'autospazio di f relativo a 2, ovvero $V_2(f) = \{v \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(v) = 2v\} = Ker(f - 2id_{\mathbb{R}^3})$.

Se f esiste si risponda alle seguenti domande: È unica? È un isomorfismo? $\exists$ una retta f-invariante non contenuta in $V_2(f)$?

Dimostrazione. Notiamo in primo luogo che U e W sono descritti da un'equazione in $\mathbb{R}^3$, quindi sono 2 iperpiani in $\mathbb{R}^3$ e hanno entrambi dimensione 2: $dimU = dimW = 2$. Abbiamo già dimostrato nell'Esercizio 6 dell'esercitazione del 12/11/21 che due piani si intersecano in almeno una retta e in al più un piano, tuttavia, questa seconda possibilità implica necessariamente che i due piani siano uguali. Dato che U e W sono diversi perché descritti da equazioni diverse essi si intersecano in una retta. Per di più, grazie alla formula di Grassmann, abbiamo che

$$dim(U + W) = dimU + dimW - dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3$$

e dato che $U + W \subset \mathbb{R}^3$ in quanto è un suo sottospazio, per contenimento e uguaglianza dimensionale $U + W = \mathbb{R}^3$.
Inoltre, il secondo punto ci chiede di calcolare $f(e_3)$: notiamo che $e_3 \notin U$ e $e_3 \notin W$, in quanto non soddisfa nessuna delle due equazioni.
Per costruire una tale f, vogliamo costruire la sua matrice associata e per fare questo ci serve definire una base in partenza e una in arrivo. Per quella in partenza abbiamo due scelte possibili: o scegliamo una base in cui compare $\mathbb{R}^3$, oppure costruiamo una base alla Grassmann, ovvero troviamo una base dell'intersezione $U \cap W$, la completiamo a base di W e di U e otteniamo una base della somma che abbiamo già dimostrato essere $\mathbb{R}^3$. Utilizziamo il secondo metodo: capiamo prima chi è $U \cap W$:

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x - y + z = 0,\ y + z = 0 \right\}$$

e ricavando tutto in funzione di z otteniamo che $x = y = -z$ quindi ogni vettore dell'intersezione è fatto come:

$$\begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$U \cap W = Span(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}) = Span(v_1)$$

Completiamo ora $\{v_1\}$ a base di U: prendiamo un altro vettore di U (basta che soddisfi l'equazione) che non sia multiplo di v_1, ad esempio prendiamo il vettore

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ma allora $U = Span(v_1, v_2)$. Completiamo ora invece $\{v_1\}$ a base di W: prendiamo un altro vettore di W (basta che soddisfi l'equazione) che non sia multiplo di v_1, ad esempio prendiamo il vettore

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ma allora $W = Span(v_1, v_3)$. Adesso, per motivi teorici, abbiamo trovato una base di $\mathbb{R}^3$, in quanto $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $U + W$ che è $\mathbb{R}^3$ per quanto si è visto sopra. Quindi sia $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$ in partenza. Per sia B anche base di arrivo. Cerchiamo allora di capire come è fatta $M_B^B(f)$. Innanzitutto cerchiamo di capire dove va v_1. Poiché, per la prima ipotesi, $f(U) \subset W$ e $f(W) \subset U$, se $x \in U \cap W$, allora $f(x) \in U \cap W$ in quanto $x \in U \implies f(x) \in W$ e $x \in W \implies f(x) \in U \implies f(x) \in U \cap W$ (in particolare $f(U \cap W) \subset U \cap W$, ovvero $U \cap W$ è f-invariante) e dato che $v_1 \in U \cap W$, si ha che $f(v_1) \in U \cap W = Span(v_1)$ $\implies f(v_1) = \lambda v_1$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Quindi la prima colonna di $M_B^B(f)$ sarà del tipo:

$$M_B^B(f)^1 = [f(v_1)]_B = [\lambda v_1]_B = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cosa sappiamo invece di $f(v_2)$ e di $f(v_3)$? Ricordiamo che $v_2 \in U$ e quindi per ipotesi $f(v_2) \in W$ (primo punto) $\implies$ esiste una combinazione lineare di v_1, v_3 (che sono una base di W per motivi teorici) che genera $f(v_2)$: $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tale che $f(v_2) = \alpha v_1 + \beta v_3$. Ma allora conosciamo anche la seconda colonna di $M_B^B(f)$:

$$M_B^B(f)^2 = [f(v_2)]_B = [\alpha v_1 + \beta v_3]_B = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

Ma con lo stesso ragionamento, $v_3 \in W \implies f(v_3) \in U \implies$ esiste una combinazione lineare di v_1, v_2 (che sono una base di U per motivi teorici) che genera $f(v_3)$: $\exists\, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tale che $f(v_2) = \gamma v_1 + \delta v_2$. Ma allora conosciamo anche la terza colonna di $M_B^B(f)$:

$$M_B^B(f)^3 = [f(v_3)]_B = [\gamma v_1 + \delta v_2]_B = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \delta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}$$

Notiamo che abbiamo 4 zeri nella matrice: non male.

Osservazione: Per costruire la matrice abbiamo sfruttato la prima ipotesi: ricapitoliamo il tutto mostrando allora che la prima ipotesi è sempre soddisfatta per ogni applicazione lineare associata a una matrice fatta come $M_B^B(f)$. Mostriamo che $f(U) \subset W\ \forall u \in U$: ci basta definire la f su una base di U, ma già ce l'abbiamo: $\{v_1, v_2\}$ e sappiamo anche le loro immagini: $f(v_1) = \lambda v_1$ e $f(v_2) = \alpha v_1 + \beta v_3$, che sono elementi di W :). Stesso discorso per dimostrare che $f(W) \subset U$.

Imponiamo ora la seconda condizione: mandiamo e_3 nel vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Per la teoria, se scriviamo e_3 come combinazione lineare di elementi di B e moltiplichiamo $M_B^B(f)$ per le coordinate di e_3, otteniamo le coordinate di $f(e_3)$ nella base B: scriviamo e_3 come combinazione lineare di elementi di B: la combinazione lineare che genera e_3 è: $e_3 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2 + v_3)$

e quindi

$$[e_3]_B = [\frac{1}{2}(v_1 + v_2 + v_3)]_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Per comodità utilizziamo il vettore $2e_3$ (lo possiamo fare per l'omogeneità di f):

$$[2e_3]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e inoltre $f(2e_3) = 2f(e_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Scriviamo adesso le coordinate di $f(2e_3)$ in base B (chi è questo vettore? È il prodotto tra $M_B^B(f)$ e $[2e_3]_B$):

$$\left[\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_B = [v_2 + 4v_3]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

dunque

$$M_B^B(f) \cdot [2e_3]_B = [f(2e_3)]_B \Longrightarrow M_B^B(f) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

imponiamo dunque questa uguaglianza:

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \delta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda + \alpha + \gamma \\ \delta \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo $\lambda + \alpha + \gamma = 0$, $\delta = 1$ e $\beta = 4$. Ricaviamo dalla prima uguaglianza γ: $\gamma = -\lambda - \alpha$ quindi la matrice di partenza non dipende più da 5 parametri, ma solo da 2!

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha & -\lambda - \alpha \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Una matrice del genere (che è un'applicazione) rispetta sia l'ipotesi 1, che l'ipotesi 2.
Infine, ci veniva richiesto che $V_2(f)$ avesse dimensione 2. Sappiamo che $V_2(f) = Ker(f - 2id_{\mathbb{R}^3})$, quindi possiamo studiare $f - 2id_{\mathbb{R}^3}$: qual è la sua matrice associata? Dato che l'applicazione matrice associata è un isomorfismo:

$$M_B^B(f - 2id_{\mathbb{R}^3}) = M_B^B(f) - 2M_B^B(id_{\mathbb{R}^3}) = M_B^B(f) - 2I_3$$

dove il passaggio $M_B^B(id_{\mathbb{R}^3}) = I_3$ è giustificato dal fatto che si ha la stessa base in partenza e in arrivo e l'applicazione è l'identità. Ma allora $dimKer(f - 2id_{\mathbb{R}^3}) = 2 \Longleftrightarrow dimIm(f - 2id_{\mathbb{R}^3}) = rnk(f - 2id_{\mathbb{R}^3}) = 1$ per la formula di nucleo e immagine, e dato che $M_B^B(f) - 2I_3$ è la matrice associata a $f - 2id_{\mathbb{R}^3}$, ci basta far vedere che è possibile, o impossibile, soddisfare l'ipotesi $rnk(M_B^B(f) - 2I_3) = 1$. Questo rango è calcolabile con Gauss:

$$M_B^B(f) - 2I_3 = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & \alpha & -\lambda - \alpha \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

il rango di tale matrice varia al variare di λ e α: facciamo qualche operazione:

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & \alpha & -\lambda - \alpha \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \mapsto R_3 + 2R_2} \begin{pmatrix} \lambda - 2 & \alpha & -\lambda - \alpha \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tale matrice sembra ridotta a scalini, ma non lo è sempre: infatti se $\lambda = 2$, la prima colonna è nulla e la matrice non è a scalini. Continuiamo con le operazioni:

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & \alpha & -\lambda - \alpha \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \mapsto C_2 + 2C_3} \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -2\lambda - \alpha & -\lambda - \alpha \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \mapsto R_1 + (\lambda + \alpha)R_2}$$

$$\xrightarrow{R_1\mapsto R_1+(\lambda+\alpha)R_2}\begin{pmatrix}\lambda-2 & -2\lambda-\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{C_1\longleftrightarrow C_3}\begin{pmatrix}0 & -2\lambda-\alpha & \lambda-2\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\longleftrightarrow R_2}$$

$$\xrightarrow{R_1\longleftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2\lambda-\alpha & \lambda-2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Adesso abbiamo un vantaggio grande: il primo pivot, nel posto $1,1$ è sempre fisso e la matrice ha almeno rango 1. Se voglio che il rango sia uguale a 1 allora non ci devono essere altri pivot: gli unici altri scalino possibili sarebbero quelli in posizione $2,2$ e $2,3$: devo imporli uguale a 0! $rnk(M_B^B(f)-2I_3)=1 \iff -2\lambda-\alpha=\lambda-2=0$ ovvero $\lambda=2$ e $\alpha=-4$. Abbiamo allora completamente determinato la matrice $M_B^B(f)$, in quanto abbiamo dato un valore a tutti i parametri liberi. In particolare

$$M_B^B(f)=\begin{pmatrix}2 & -4 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

è la matrice associata all'unica applicazione lineare possibile che soddisfa quelle 3 proprietà contemporaneamente. Quindi abbiamo dimostrato che tale applicazione esiste e per di più che è unica: $\exists!\, f$ che soddisfa le tre ipotesi. Se vogliamo definire f su una base:

$$f(v_1)=2v_1,\ f(v_2)=-4v_1+4v_3,\ f(v_3)=2v_1+v_2$$

Rispondiamo ora alle domande: sì, la f è unica e si è già mostrato il perché.
È un isomorfismo? f è un isomorfismo $\iff rnkf=3 \iff rnk(M_B^B(f))=3$ che è vero in quanto scambiando la seconda e la terza riga di $M_B^B(f)$ otteniamo una gradinatura con 3 pivot (basta poi dividere per gli scalari più adatti). Quindi sì, f è un isomorfismo.
Ci chiediamo ora se esiste una retta f-invariante non contenuta in $V_2(f)$. Notiamo che $v_1\in V_2(f)$ in quanto $f(v_1)=2v_1$. Inoltre notiamo che se $x\in U-(U\cap W)$, allora, per ipotesi, $f(x)\in W$ e quindi è impossibile che $f(x)=2x$ ($2x$ non può appartenere a W, perché in quanto sottospazio gli apparterrebbe anche x, ma x lo abbiamo scelto apposta fuori da W). Stesso discorso per i vettori di W che non stanno in U. Notiamo inoltre che anche $V_2(f)$ ha dimensione 2, dato che abbiamo imposto precedentemente che $rnk(M_B^B(f)-2I_3)=rnk(f-2id_{\mathbb{R}^3})=1$ e dunque è un piano dentro $\mathbb{R}^3$ che contiene la retta $Span(v_1)$. Supponiamo che esista una retta r f-invariante non contenuta in $V_2(f)$: essa non può essere contenuta nemmeno in U e in W in quanto non sono f-invarianti per ipotesi. Sicuramente $r=Span(v)$, con v un vettore incognito non nullo, inoltre $f(v)=\zeta v$ con $\zeta\in\mathbb{R}$ e $\zeta\neq 2$ (altrimenti sarebbe $V_2(f)$). Per di più $v\in Ker(f-\zeta id_{\mathbb{R}^3})$: se dunque esiste un vettore non nullo appartenente al nucleo, tale nucleo ha dimensione $geq1$ e dunque $rnk(f-\zeta id_{\mathbb{R}^3})\leq 2$. Bisogna dunque verificare con Gauss per quali valori di ζ si può avere $rnk(f-\zeta id_{\mathbb{R}^3})=rnk(M_B^B(f)-\zeta I_3)=2$:

$$M_B^B(f)-\zeta I_3=\begin{pmatrix}2-\zeta & -4 & 2\\ 0 & -\zeta & 1\\ 0 & 4 & -\zeta\end{pmatrix}\xrightarrow{C_1\mapsto\frac{1}{2-\zeta}C_1}=\begin{pmatrix}1 & -4 & 2\\ 0 & -\zeta & 1\\ 0 & 4 & -\zeta\end{pmatrix}$$

(possiamo farlo in quanto $\zeta\neq 2$)

$$\begin{pmatrix}1 & -4 & 2\\ 0 & -\zeta & 1\\ 0 & 4 & -\zeta\end{pmatrix}\xrightarrow[C_3\mapsto C_3-2C_1]{C_2\mapsto C_2+4C_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\zeta & 1\\ 0 & 4 & -\zeta\end{pmatrix}\xrightarrow{C_2\mapsto C_2+\zeta C_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 4-\zeta^2 & -\zeta\end{pmatrix}\xrightarrow{C_2\longleftrightarrow C_3}$$

$$\xrightarrow{C_2\longleftrightarrow C_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -\zeta & 4-\zeta^2\end{pmatrix}$$

notiamo che il rango di questa matrice è 2 se e solo se l'ultimo candidato gradino è 0: $4-\zeta^2=0 \iff \zeta=\pm 2$ ma poiché $\zeta\neq 2$ per ipotesi si ha $\zeta=-2$. Quindi per $\zeta=-2$, $rnk(f+2id_{\mathbb{R}^3})=rnk(M_B^B(f)+2I_3)=2$, ovvero $dimKer(f+2id_{\mathbb{R}^3})=1$ e dato che la retta r è contenuta in $Ker(f+2id_{\mathbb{R}^3})$ per contenimento e uguaglianza dimensionale si ha che $r=Ker(f+2id_{\mathbb{R}^3})=V_{-2}(f)$. Questo risponde alla domanda: sì, esiste una retta f-invariante non contenuta in $V_2(f)$.

9.3 Esercizio 3, prosieguo Esercizio 2

Sia $r = Ker(f + 2id_{\mathbb{R}^3}) = V_{-2}(f)$ come nell'esercizio precedente. Si trovi una base di r e si dimostri che $\mathbb{R}^3 = V_2(f) \oplus V_{-2}(f)$.

Dimostrazione. Da quanto visto nell'Esercizio precedente, tale r è un retta dentro $\mathbb{R}^3$ e ha dunque dimensione 1. Ci basta dunque trovare un vettore $v \in Ker(f + 2id_{\mathbb{R}^3})$ non nullo: così facendo si avrà che $Ker(f + 2id_{\mathbb{R}^3}) = Span(v)$. Come lo si trova tale v? Basta risolvere il sistema associato a

$$(M_B^B(f) + 2I_3) \cdot v = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{cases} 4x - 4y + 2z & = 0 \\ 2y + z & = 0 \\ 4y + 2z & = 0 \end{cases}$$

notiamo che la terza equazione è il doppio della seconda: può dunque essere scartata dal sistema in quanto non inficia sulla soluzione. Otteniamo:

$$\begin{cases} 4x - 4y + 2z & = 0 \\ 2y + z & = 0 \end{cases}$$

che è un sistema di 2 equazioni in 3 incognite. Ricavando z dalla terza e sostituendolo nella seconda otteniamo tutto in funzione di y: $z = -2y$ e $x = 2y$. Quindi un vettore del nucleo ha la forma

$$\begin{pmatrix} 2y \\ y \\ -2y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$Ker(f + 2id_{\mathbb{R}^3}) = Span(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix})$$

Abbiamo dunque trovato una base di r.
Dimostriamo ora che $\mathbb{R}^3 = V_2(f) \oplus V_{-2}(f)$. Abbiamo già visto nell'esercitazione del 26/10/21 il metodo con cui affrontare problemi del genere. Dimostriamo innanzitutto che $V_2(f)$ e $V_{-2}(f)$ sono in somma diretta, ovvero che la loro intersezione è banale: sia $v \in V_2(f) \cap V_{-2}(f)$. Allora $f(v) = 2v$ in quanto $v \in V_2(f)$ e $f(v) = -2v$ in quanto $v \in V_{-2}(f)$: dunque $2v = -2v$ ovvero $v = 0$. Quindi i due sottospazi sono in somma diretta: $V_2(f) \cap V_{-2}(f) = \{0\}$. Per dimostrare ora che la loro somma è $\mathbb{R}^3$, ovvero che sono supplementari, possiamo ragionare sulle dimensioni: per Grassmann:

$$dim(V_2(f) + V_{-2}(f)) = dim(V_2(f)) + dim(V_{-2}(f)) - dim(V_2(f) \cap V_{-2}(f))$$

ora $dimV_2(f) = 2$ (in quanto già lo avevamo dimostrato nell'Esercizio precedente), $dim(V_{-2}(f)) = 1$ in quanto $V_{-2}(f)$ è la retta r di sopra e $dim(V_2(f) \cap V_{-2}(f)) = 0$ in quanto si è dimostrato che $V_2(f) \cap V_{-2}(f) = \{0\}$. Ma allora

$$dim(V_2(f) + V_{-2}(f)) = dim(V_2(f)) + dim(V_{-2}(f)) - dim(V_2(f) \cap V_{-2}(f)) = 2 + 1 - 0 = 3$$

Ma allora $V_2(f) + V_{-2}(f)$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 3 $\Longrightarrow$ per contenimento e uguaglianza dimensionale si ha che $V_2(f) + V_{-2}(f) = \mathbb{R}^3$.

9.4 Esercizio 4

Siano V e W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, tali che $dimV = n$ e $dimW = m$. Sia $H \subset V$ un sottospazio di V e sia $K \subset W$ un sottospazio di W. Sia $T = \{f \in Hom(V, W) \,|\, Kerf \supset H,\ Imf \subset K\}$. Mostrare che T è un sottospazio e calcolare $dimT$.

Dimostrazione. Dimostriamo che T è un sottospazio: valutiamo le 3 richieste.

· $0 \in T$? (dove $0 : V \longrightarrow W$ è l'applicazione nulla) Dato che $Ker0 = V$ e $Im0 = \{0\}$ si ha che $V \supset H$ (in quanto H è un suo sottospazio) e $\{0\} \subset Imf$ in quanto l'immagine è un sottospazio. Quindi $0 \in T$.

· Siano $f, g \in T$. Vogliamo vedere se è vero che $Ker(f + g) \supset H$ e $Im(f + g) \subset K$. Cominciamo dalla prima: sia $h \in H$, ovviamente $H \subset Kerf$ e $H \subset Kerg$ in quanto per ipotesi $f, g \in T$. Valutiamo $(f + g)(h)$:

$$(f + g)(h) = f(h) + g(h) = 0 + 0 = 0$$

ovvero $H \subset Ker(f + g)$. Continuiamo con la seconda. Sia $v \in V$, ovviamente $f(v) \in K$ e $g(v) \in K$ in quanto per ipotesi $f, g \in T$. Valutiamo $(f + g)(v)$:

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v) \in K$$

in quanto K è un sottospazio ed è per questo chiuso per somma. Quindi $Im(f + g) \subset K$. Dunque T è chiuso per somma.

· Sia $f \in T$ e $\mu \in \mathbb{K}$. Vogliamo vedere se $Ker(\mu f) \supset H$ e $Im(\mu f) \subset K$. Cominciamo con la prima: sia $h \in H$, ovviamente $f(h) = 0$ in quanto $f \in T$. Valutiamo $(\mu f)(h)$:

$$(\mu f)(h) = \mu f(h) = 0$$

ovvero $H \subset Ker(\mu f)$. Continuiamo con la seconda. Sia $v \in V$, ovviamente $f(v) \in K$ in quanto per ipotesi $f \in T$. Valutiamo $(\mu f)(v)$:

$$(\mu f)(v) = \mu f(v) \in K$$

in quanto K è un sottospazio ed è per questo chiuso per prodotto per scalari. Quindi $Im(\mu f) \subset K$. Dunque T è chiuso per prodotto per scalari.
Dunque $T \subset Hom(V, W)$ è un sottospazio vettoriale di $Hom(V, W)$.

Proviamo ora a trovare la dimensione di tale sottospazio. Cominciamo con una Cit. di Manfre:"Il calcolo della dimensione dentro a $Hom(V, W)$ è quasi impossibile. Non fatelo. Passate allo spazio di matrici". Infatti, per motivi teorici, se due spazi vettoriali sono isomorfi, allora i loro sottospazi sono in bigezione e in particolare se $V \cong W$ tramite una f e $H \subset V$ è un sottospazio di V tale che $dimH = h$ allora $dim(f(H)) = h$. Perché questo? Perché lo spazio delle applicazioni lineari è uno spazio "brutto": se volessimo trovare la dimensione di T, dovremmo trovare una sua base... "e come si fa? Boh" :) (sempre Manfre)
Se invece lavoriamo in uno spazio isomorfo a $Hom(V, W)$, ad esempio $M(m, n, \mathbb{K})$, la cosa si fa molto più facile, perché lo spazio delle matrici è uno spazio bello, su cui sappiamo lavorare.
Come procediamo? Scegliamo una base attinente alla geometria del problema: sappiamo che in partenza abbiamo un sottospazio $H \subset V$, allora possiamo prendere una base di H e completarla a base di V: sia $\{v_1, ..., v_h\}$ una base di H e completiamo tale insieme a base di V: otteniamo $B = \{v_1, ..., v_h, v_{h+1}, ..., v_n\}$ base di V. In arrivo invece abbiamo un sottospazio $K \subset W$: facciamo la stessa cosa. Sia $\{w_1, ..., w_k\}$ una base di K e la completiamo a base di W: otteniamo $D = \{w_1, ..., w_k, w_{k+1}, ..., w_m\}$ base di W. Adesso possiamo usare l'isomorfismo $M_D^B : Hom(V, W) \longrightarrow M(m, n, \mathbb{K})$: ci interessa sapere dove va T tramite M_D^B. Chi è ImT? Sono tutte le matrici associate agli elementi di T: prendiamo allora un elemento di T: sia $f \in T$ e sia $M_D^B(f)$ la sua matrice associata. Cerchiamo di costruirla esplicitamente: dobbiamo trovare le sue colonne, tramite le coordinate delle immagini degli elementi di B tramite f in D. Valutiamo allora $[f(v_i)]_D$ $\forall v_i \in B$.
Notiamo che per $1 \leq i \leq h$, $f(v_i) = 0$, in quanto $v_i \in H$ e per ipotesi $f \in T$, quindi $H \subset Kerf$. Allora

$$\forall 1 \leq i \leq h,\ [f(v_i)]_D = [0]_D = \begin{pmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ \cdots \\ 0_m \end{pmatrix}$$

Cosa posso dire di v_i per $h+1 \leq i \leq n$? Posso usare il fatto che $Imf \subset K$, infatti $f(v_i)$ per $h+1 \leq i \leq n$ è un elemento di Imf, e dunque lo è anche di K: posso scrivere ogni $f(v_i)$ come combinazione lineare di elementi di K, ma una base K ce l'ho: $\{w_1, ..., w_k\}$. In particolare ogni elemento dell'immagine è combinazione lineare di $\{w_1, ..., w_k\}$, e non di $\{w_{k+1}, ..., w_m\}$, che è la restante parte della base D. Ma quindi come sono fatte le coordinate delle immagini nella base di arrivo D? Come segue:

$$\forall\ h+1 \leq i \leq n,\ [f(v_i)]_D = [x_1 w_1 + ... + x_k w_k + 0 w_{k+1} + ... + 0 w_m]_D = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_k \\ 0_{k+1} \\ \dots \\ 0_m \end{pmatrix}$$

con $x_i \in \mathbb{R}\ \forall\ h+1 \leq i \leq n$. Ma allora la matrice $M_D^B(f)$ è fatta come segue:

$$M_D^B(f) = \begin{pmatrix} 0_1 & \dots & 0_h & x_{h+1_1} & \dots & x_{n_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_k & \dots & 0_k & x_{h+1_k} & \dots & x_{n_k} \\ 0_{k+1} & \dots & 0_{k+1} & 0_{k+1} & \dots & 0_{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_m & \dots & 0_m & 0_m & \dots & 0_m \end{pmatrix}$$

dove x_{i_j} si intende il j-esimo coefficiente della combinazione lineare dell'immagine del vettore v_i. Abbiamo dunque un'idea di come è fatto lo spazio: le prime h colonne sono nulle, mentre le restanti $n-h$ hanno ognuna k coefficienti liberi di variare. Possiamo allora trovare una base dello spazio $M_D^B(T)$, che è banalmente data da

$$\{E_{1,h+1}, ..., E_{k,h+1}, E_{1,h+2}, ..., E_{k,h+2}, ..., E_{1,n}, ..., E_{k,n}\}$$

(che è il quadrato in alto a destra). Quanti elementi ha questo insieme? Ne ha $(n-h)\cdot k$ (k righe e $n-h$ colonne) e quindi $dim M_D^B(T) = (n-h)\cdot k$. Dato che M_D^B è un isomorfismo, esso preserva le dimensioni e quindi si ha che $dim T = dim M_D^B(T) = (n-h)\cdot k$.

10 Esercitazione 02-12-2021

10.1 Esercizio 1

Sia $A \in M(3, \mathbb{R})$ definita da

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 4 \\ 1 & a-1 & 3 \\ 2 & a-2 & a \end{pmatrix}$$

con $a \in \mathbb{R}$. Determinare $rnkA$ al variare di a in $\mathbb{R}$.

Soluzione: Per trovare $rnkA$ applichiamo l'algoritmo di Gauss-righe alla matrice A. Notiamo che c'è subito un problema: l'algoritmo di Gauss comincia cercando la prima colonna non nulla e poi cerca in essa il primo elemento non nullo. Nel nostro caso la prima colonna non nulla è la prima, ma non abbiamo certezza che l'elemento di posto $1,1$ sia non nullo, in quanto dipende dal valore di a. Per ovviare a questo problema scambiamo la prima e la seconda riga:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 4 \\ 1 & a-1 & 3 \\ 2 & a-2 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \Longleftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 3 \\ a & 1 & 4 \\ 2 & a-2 & a \end{pmatrix}$$

adesso possiamo procedere tranquillamente con l'algoritmo: produciamo degli zeri sotto l'elemento di posto $1,1$: sottraiamo alla seconda riga la prima moltiplicata per a e alla terza riga la prima moltiplicata per 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & a-1 & 3 \\ a & 1 & 4 \\ 2 & a-2 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \mapsto R_3 - 2R_1]{R_2 \mapsto R_2 - aR_1} \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 3 \\ 0 & -a^2+a+1 & 4-3a \\ 0 & -a & a-6 \end{pmatrix}$$

abbiamo così ottenuto il primo pivot! Andiamo avanti: consideriamo la sottomatrice ottenuta scartando la prima riga. Anche qui abbiamo un problema: dobbiamo trovare la prima colonna non nulla che è la seconda (notiamo che non è mai nulla) e cercare in essa il primo elemento non nullo: ma al variare di a si hanno risultati diversi e mai completamente diversi da 0... con qualche operazione di riga (dette anche magheggi), possiamo tentare di ovviare al problema anche questa volta:

$$\begin{pmatrix} 1 & a-1 & 3 \\ 0 & -a^2+a+1 & 4-3a \\ 0 & -a & a-6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \mapsto R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 3 \\ 0 & -a^2+1 & -2-2a \\ 0 & -a & a-6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \mapsto R_2 - aR_3} \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 3 \\ 0 & 1 & -a^2+4a-2 \\ 0 & -a & a-6 \end{pmatrix}$$

abbiamo così tolto il problema della scalinatura: il primo elemento non nullo della seconda colonna della sottomatrice ottenuta scartando la prima riga è quello di posto $2,2$. Adesso mettiamo uno 0 sotto all'elemento di posto $2,2$: sommiamo alla terza riga la seconda moltiplicata per a

$$\begin{pmatrix} 1 & a-1 & 3 \\ 0 & 1 & -a^2+4a-2 \\ 0 & -a & a-6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \mapsto R_3 + aR_2} \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 3 \\ 0 & 1 & -a^2+4a-2 \\ 0 & 0 & -a^3+4a^2-a-6 \end{pmatrix}$$

abbiamo così ottenuto il secondo pivot: il rango è sicuramente almeno 2. In particolare se $-a^3+4a^2-a-6 \neq 0$, ovvero, risolvendo l'equazione, se $a \neq 2$, $a \neq -1$ e $a \neq 3$, allora $rnkA = 3$, mentre se $a = 2$, $a = -1$ o $a = 3$ allora $rnkA = 2$. Per ricapitolare:

$$a = 2,\ a = 3 \text{ o } a = -1 \Longrightarrow rnk(A) = 2$$

$$a \neq -1, 2, 3 \Longrightarrow rnk(A) = 3$$

e quindi A è invertibile se e solo se $a \neq -1, 2, 3$.
Notiamo che, per quanto visto a teoria, ogni matrice "intermedia" è ottenuta moltiplicando A a sinistra per un'opportuna matrice, in particolare per la matrice ottenuta facendo le stesse operazioni di riga su I_3. Mostriamo che il risultato, oltre a funzionare teoricamente, funziona anche praticamente: facciamo le stesse operazioni che abbiamo fatto ad A su I_3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \longleftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \mapsto R_3 - 2R_1]{R_2 \mapsto R_2 - aR_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -a & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \mapsto R_2 + R_1}$$

$$\xrightarrow{R_2 \mapsto R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -a-2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \mapsto R_2 - aR_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & a-2 & 1-a \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \mapsto R_3 + aR_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & a-2 & 1-a \\ a & a^2-2a-2 & -a^2+a+1 \end{pmatrix}$$

Possiamo dunque verificare che il prodotto tra quest'ultima matrice e A dà come risultato proprio la matrice che avevamo trovato facendo le stesse operazioni (nello stesso ordine) su A

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & a-2 & 1-a \\ a & a^2-2a-2 & -a^2+a+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 4 \\ 1 & a-1 & 3 \\ 2 & a-2 & a \end{pmatrix}$$

che effettivamente, con un po' di conti, confermiamo essere proprio la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a-1 & 3 \\ 0 & 1 & -a^2+4a-2 \\ 0 & 0 & -a^3+4a^2-a-6 \end{pmatrix}$$

10.2 Esercizio 2

Sia $A \in M(3, \mathbb{R})$ definita da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

Determinare se A è invertibile e in caso affermativo calcolarne l'inversa.
Soluzione: l'idea che sta dietro a esercizi come questo è sempre la stessa: fare operazioni di riga fino ad ottenere la matrice identità (nel caso in cui ci riusciamo) e applicare poi quelle stesse operazioni di riga (nello stesso ordine) alla matrice identità (in poche parole basta fare Gauss completo). In questo modo siamo sicuri di trovare l'inversa in quanto il prodotto tra la matrice a cui applichiamo le operazioni a partire da I_3 e A è proprio I_3. Per fare prima, visto che dobbiamo fare le stesse operazioni di riga sia su A che su I_3, consideriamo la matrice $(A|I_3)$ ovvero la matrice

$$(A|I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 20 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(dobbiamo fare le stesse operazioni di riga sia su A che su I_3, tanto vale farle insieme: tuttavia ci focalizzeremo solo sulla parte sinistra: non ci interessa fare operazioni prettamente a destra, ma solo il risultato finale). Cominciamo con il fare Gauss (non scriverò le operazioni a parole, ma solo sopra le frecce):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 20 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \mapsto R_3 - 2R_1]{R_2 \mapsto R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 18 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \longleftrightarrow R_2}$$

$$\xrightarrow{R_3 \longleftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 18 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \mapsto \frac{R_2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \mapsto R_2 - 9R_3}$$

$$\xrightarrow[R_1 \mapsto R_1 - R_3]{R_2 \mapsto R_2 - 9R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -9 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \mapsto R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 & 8 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -9 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notiamo che a sinistra abbiamo finalmente raggiunto la matrice identità, quindi possiamo dichiarare concluso l'algoritmo. Abbiamo allora trovato l'inversa, che, per ragioni teoriche, è la matrice che si trova a destra, ovvero:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 8 & -\frac{1}{2} \\ 8 & -9 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo che effettivamente questa soluzione è corretta: facciamo il prodotto tra la matrice appena trovata e A. Con dei semplici calcoli otteniamo:

$$\begin{pmatrix} -6 & 8 & -\frac{1}{2} \\ 8 & -9 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \cdot 1 + 8 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 & -6 \cdot 1 + 8 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 4 & -6 \cdot 1 + 8 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 20 \\ 8 \cdot 1 - 9 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 & 8 \cdot 1 - 9 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 & 8 \cdot 1 - 9 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 20 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 & -1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 20 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Facciamo anche il prodotto a sinistra, con semplici calcoli otteniamo anche questa volta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 8 & -\frac{1}{2} \\ 8 & -9 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

il che ci conferma che le due matrici sono una l'inversa dell'altra.

Osservazione: quella di sopra è una procedura standard per trovare l'inversa di una matrice. Ricordiamo inoltre che una matrice quadrata è invertibile se e solo se ha rango massimo (uguale al numero delle sue righe), quindi applicare questa procedura non porta ad ambiguità, dato che se nel mezzo delle operazioni ci troviamo ad avere un numero di pivot minore rispetto al numero di righe della matrice, possiamo concludere l'algoritmo e decretare che quella matrice non ha inversa. Nel caso di sopra siamo andati avanti perché siamo riusciti a mostrare che la matrice A aveva rango 3.

10.3 Esercizio 3

Risolvere al variare di $a \in \mathbb{R}$ i seguenti sistemi lineari (ovvero dire se sono risolubili e in caso affermativo trovare le soluzioni):

$$(i) \begin{cases} ax + y + 4z & = 0 \\ x + (a-1)y + 3z & = 0 \\ 2x + (a-2)y + az & = 0 \end{cases} \qquad (ii) \begin{cases} ax + y + 4z & = 1 \\ x + (a-1)y + 3z & = 0 \\ 2x + (a-2)y + az & = 1 \end{cases}$$

Soluzione: Analizziamo i due sistemi separatamente. Il sistema di sinistra è un sistema omogeneo, che, per quanto visto a teoria, è sempre risolubile e il vettore nullo è una soluzione: in particolare, lo spazio delle soluzioni è $KerA$, dove con A intendiamo la matrice dei coefficienti. Il secondo sistema invece non è omogeneo, quindi non possiamo dire a priori se esso sia o meno risolubile. Se lo è, sappiamo che lo spazio delle soluzioni è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$ di giacitura $KerA$.
Dal punto di vista geometrico, risolvere un sistema come quelli sopra significa capire come si intersecano i tre iperpiani di $\mathbb{R}^3$ descritti dalle 3 equazioni che compaiono nel sistema (notare che gli iperpiani non sono fissi, ma variano al variare di a in $\mathbb{R}$). Analizziamo il primo sistema: come ci aspettiamo che possano intersecarsi 3 piani (posso dire piani in quanto un iperpiano di $\mathbb{R}^3$ è un oggetto di dimensione 2) in $\mathbb{R}^3$? In generale l'intersezione di 3 piani può essere una retta (se due piani sono distinti e il terzo piano interseca gli altri due nella stessa retta), un piano (se sono tutti lo stesso piano) o l'origine (nel caso siano distinti e il terzo piano non intersechi gli altri due in una retta). Nel secondo caso invece, le tre equazioni non rappresentano degli iperpiani, in quanto, per esempio nella prima, il vettore nullo non appartiene all'insieme descritto dall'equazione: in particolare diciamo che quelli sono iperpiani affini, (non sono sottospazi). Quindi, la prima e la terza equazione, rappresentano dei piani dentro $\mathbb{R}^3$ che non passano per l'origine. Risolvere il sistema significa anche qui capire come i tre piani si intersecano: in generale tre iperpiani affini in $\mathbb{R}^3$ possono intersecarsi in un punto (non l'origine), in una retta (come su), in un piano (se sono tutti uguali) o possono non intersecarsi.
Dopo questa premessa teorica, cominciamo ad analizzare i due sistemi separatamente.

(i) Scriviamo la matrice associata al primo sistema:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 4 \\ 1 & a-1 & 3 \\ 2 & a-2 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per risolverlo, come si è visto a teoria, ci basta riscrivere la matrice completa associata al sistema (ovvero la matrice dei coefficienti a cui si aggiunge la colonna dei termini noti $(A|b)$) e trovarne il rango: per il criterio di Rouché-Capelli il sistema ha soluzioni se e solo se

$rnkA = rnk(A|b)$ e per di più la dimensione del sottospazio affine delle soluzioni è uguale al numero di colonne di A meno il rango. Per questo primo sistema tuttavia non è necessario aggiungere l'ultima colonna in quanto è una colonna di zeri (non altera il rango). Cerchiamo allora, con Gauss, il rango della matrice A dei coefficienti: è la stessa matrice dell'Esercizio 1, quindi il rango già lo sappiamo: o è 2 o è 3. Analizziamo le due possibilità.

· Se $rnkA = 3$ ($a \neq -1, 2, 3$), allora la dimensione del sottospazio delle soluzioni è $3 - 3 = 0$, ovvero $dimKerA = 0 \Longrightarrow KerA = \{0\}$ e il sistema ha soluzione unica.

· Se invece $rnkA = 2$, ovvero $a = -1, 2,$ o 3 cosa possiamo dire sulla soluzione del sistema? Sicuramente, essendo ancora omogeneo il sistema ha soluzione. Chi è? Ci viene in aiuto la scalinatura di A fatta nell'Esercizio 1. Ci riduciamo a studiare un nuovo sistema lineare, equivalente al primo, definito da

$$\begin{pmatrix} 1 & a-1 & 3 \\ 0 & 1 & -a^2+4a-2 \\ 0 & 0 & -a^3+4a^2-a-6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(dove l'elemento di posto $3, 3$ è nullo), ovvero

$$\begin{cases} x + (a-1)y + 3z & = 0 \\ y + (-a^2+4a-2)z & = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Ricavando x e y in funzione di z otteniamo

$$y = z(a^2 - 4a + 2), \qquad x = (1-a)y - 3z = (1-a)(a^2-4a+2)z - 3z$$

ovvero ogni vettore che risolve il sistema è del tipo

$$\begin{pmatrix} (1-a)(a^2-4a+2)z - 3z \\ z(a^2-4a+2) \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} (1-a)(a^2-4a+2) - 3 \\ (a^2-4a+2) \\ 1 \end{pmatrix}$$

ovvero l'insieme delle soluzioni del sistema è

$$Span(\begin{pmatrix} (1-a)(a^2-4a+2) - 3 \\ a^2-4a+2 \\ 1 \end{pmatrix})$$

(ii) Per quanto riguarda il secondo sistema invece, non possiamo cavarcela facilmente come nel primo caso, in quanto l'ultima colonna è non nulla e quindi non possiamo escluderla a priori. Quindi stavolta dobbiamo trovare il rango della matrice completa $(A|b)$. Scriviamo intanto la matrice associata al sistema:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 4 \\ 1 & a-1 & 3 \\ 2 & a-2 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Distinguiamo anche qui due casi come avevamo fatto sopra.

· Se $rnkA = 3$ ($a \neq -1, 2, 3$) cosa succede? Notiamo che la matrice completa

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a & 1 & 4 & 1 \\ 1 & a-1 & 3 & 0 \\ 2 & a-2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

è di taglia 3×4, quindi ha rango al massimo 3 (non può salire). Ma per ipotesi $rnkA = 3$, quindi anche $rnk(A|b) = 3$ (in quanto l'aggiunta di una colonna non fa scendere il rango). Inoltre la dimensione del sottospazio affine delle soluzioni è $3 - 3 = 0$, e dunque esiste soluzione unica in quanto tale sottospazio affine ha dimensione nulla (non è però il nucleo, ma un vettore di $\mathbb{R}^3$). Chi è dunque la soluzione? Ci viene in aiuto la scalinatura fatta nell'esercizio 1. Tuttavia noi conosciamo la scalinatura solo di A, mentre ci manca la scalinatura del vettore dei termini noti. Ci basta però moltiplicare a sinistra il vettore dei termini noti per la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & a-2 & 1-a \\ a & a^2-2a-2 & -a^2+a+1 \end{pmatrix}$$

che ricordiamo essere la matrice ottenuta da I_3 facendo le stesse operazioni fatte su A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & a-2 & 1-a \\ a & a^2-2a-2 & -a^2+a+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2-a \\ -a^2+2a+1 \end{pmatrix}$$

il tutto si riduce a studiare il nuovo sistema equivalente al primo definito da

$$\begin{pmatrix} 1 & a-1 & 3 \\ 0 & 1 & -a^2+4a-2 \\ 0 & 0 & -a^3+4a^2-a-6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2-a \\ -a^2+2a+1 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{cases} x+(a-1)y+3z & = 0 \\ y+(-a^2+4a-2)z & = 2-a \\ (-a^3+4a^2-a-6)z & = -a^2+2a+1 \end{cases}$$

che possiamo risolvere dal basso verso l'alto (ricordiamo che siamo nel caso $rnkA = 3$ e quindi $-a^3+4a^2-a-6 \neq 0$). Quindi

$$z = \frac{a^2-2a-1}{a^3-4a^2+a+6}$$

$$y = 2-a+(a^2-4a+2)\frac{a^2-2a-1}{a^3-4a^2+a+6}$$

$$x = -3\frac{a^2-2a-1}{a^3-4a^2+a+6} + (1-a)2-a+(a^2-4a+2)\frac{a^2-2a-1}{a^3-4a^2+a+6}$$

abbiamo dunque trovato l'equazione esplicita della soluzione unica.

· Se invece $rnkA = 2$, ovvero $a = -1, 2,$ o 3 ragioniamo come sopra: anche stavolta ci riduciamo a studiare il sistema equivalente definito da

$$\begin{pmatrix} 1 & a-1 & 3 \\ 0 & 1 & -a^2+4a-2 \\ 0 & 0 & -a^3+4a^2-a-6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2-a \\ -a^2+2a+1 \end{pmatrix}$$

ma in questo caso l'elemento di posto $3, 3$ è nullo. Sotto forma di equazione abbiamo:

$$\begin{cases} x+(a-1)y+3z & = 0 \\ y+(-a^2+4a-2)z & = 2-a \\ 0 = -a^2+2a+1 \end{cases}$$

notiamo però che l'ultima richiesta è impossibile, infatti il polinomio $-a^2+2a+1$ non si annulla per i 3 valori di a che rendono il rango uguale a 2. Dall'impossibilità di questa uguaglianza possiamo affermare che il sistema non ha soluzioni.

10.4 Esercizio 4

Sia

$$\begin{cases} x+y+2z & = 1 \\ x+ay+z & = 1 \\ ax+y+z & = b \end{cases}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Stabilire per quali valori dei parametri a e b il sistema è risolubile e trovare la dimensione dello spazio delle soluzioni.

Soluzione: Il sistema di sopra dipende da due parametri liberi di variare in $\mathbb{R}$. Traduciamo il sistema in forma matriciale: sia A la matrice dei coefficienti, x un vettore di $\mathbb{R}^3$ e b il vettore dei termini noti. Allora il sistema di sopra è equivalente a

$$A \cdot x = b \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

Per stabilire se il sistema ha soluzione applichiamo l'algoritmo di Gauss-righe alla matrice completa $(A|b)$ definita da

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & b \end{pmatrix}$$

Scriverò le operazioni sulle righe sopra le frecce:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & b \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \mapsto R_3 - aR_1]{R_2 \mapsto R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-a & 1-2a & b-a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \mapsto R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2a & b-a \end{pmatrix}$$

notiamo che ora il coefficiente di posto $2,2$ non è sempre non nullo e non è possibile, con operazioni di riga, riuscire a far venire nel posto $2,2$ un elemento sempre diverso da 0. Dovremo dunque studiare due casi particolari $a = 1$ e $a \neq 1$. Valutiamoli separatamente:

· $a = 1$: la matrice di sopra è ora:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & b-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \mapsto R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \mapsto -R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$$

che è a gradini e il secondo pivot è l'elemento di posto $2,3$. Ma allora il rango della matrice A (di A, non di $(A|b)$) è 2. Quanto vale invece il rango della matrice completa? Dipende dal valore di b (ricordiamo che per il criterio di Rouché-Capelli il sistema ha soluzione se e solo se $rnk(A) = rnk(A|b)$). Notiamo che il rango della matrice completa è 2 se $b = 1$, mentre se $b \neq 1$ allora l'elemento di posto $3,4$ è un pivot della matrice $(A|b)$ e il suo rango è 3. Quindi, per ricapitolare, si ha che nel caso in cui $a = 1$, se $b = 1$ allora $rnk(A|b) = 2$ e il sistema ha soluzione per Rouché-Capelli, mentre se $b \neq 1$ il sistema non ha soluzioni. In particolare, se $b = 1$ l'insieme delle soluzioni ha dimensione $3 - 2 = 1$, quindi è una retta affine (ricordiamo che la dimensione dello spazio delle soluzioni è la differenza tra il numero delle colonne di A e il suo rango).

· $a \neq 1$: la matrice di sopra ha un pivot nel posto $2,2$, quindi l'algoritmo non trova problemi e va avanti.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2a & b-a \end{pmatrix}$$

Il problema rinasce ora, ovvero nel momento in cui ci troviamo davanti all'elemento di posto $3,3$: infatti, come prima abbiamo un parametro non sempre non nullo che dipende da a. Anche qui siamo costretti a studiare il caso $a = 0$ e il caso $a \neq 0$ separatamente.

· $a = 0$: In questo caso la matrice di sopra è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

che è a gradini e il secondo pivot è l'elemento di posto $2,2$. Ma allora il rango della matrice A (di A, non di $(A|b)$) è 2. Quanto vale invece il rango della matrice completa? Dipende ancora una volta dal valore di b. Se l'elemento di posto $3,4$ è nullo allora il rango di $(A|b)$ è 2, se invece non lo è, esso forma un gradino di $(A|b)$ e $rnk(A|b) = 3$. Quindi, per ricapitolare, si ha che nel caso in cui $a = 0$, se $b = 0$ allora $rnk(A|b) = 2$ e il sistema ha soluzione per Rouché-Capelli, mentre se $b \neq 0$ il sistema non ha soluzioni. In particolare, se $b = 0$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione $3 - 2 = 1$, quindi è una retta affine.

$\cdot\ a \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2a & b-a \end{pmatrix}$$

In questo caso la matrice di sopra ha 3 pivot (nei posti $1,1$, $2,2$ e $3,3$), dunque A ha necessariamente rango 3. Quanto vale il rango della matrice $(A|b)$? Non può che valere 3 anch'esso (la matrice ha 3 righe, quindi il rango non può essere maggiore di 3): allora $rnk(A) = rnk(A|b) = 3$ e per Rouché-Capelli il sistema ha soluzione. In particolare lo spazio delle soluzioni ha dimensione $3 - 3 = 0$ e quindi è un punto: la soluzione è unica.

Ricapitolando il tutto:
$\cdot\ a = 1$, $b = 1$ il sistema ha soluzione e l'insieme delle soluzioni ha dimensione 1.
$\cdot\ a = 1$, $b \neq 1$ il sistema non ha soluzione.
$\cdot\ a = 0$, $b = 0$ il sistema ha soluzione e l'insieme delle soluzioni ha dimensione 1.
$\cdot\ a = 0$, $b \neq 0$ il sistema non ha soluzione.
$\cdot\ a \neq 0$ il sistema ha soluzione e l'insieme delle soluzioni ha dimensione 0.

10.5 Esercizio 5

Sia

$$W = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}) \subset \mathbb{R}^4$$

Trovare le equazioni che descrivono W.

Soluzioni: vediamo ora come trovare le equazioni che descrivono un sottospazio tramite l'algoritmo di Gauss. Piccola premessa: notiamo che se

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in W$$

, allora (chiamati v_1 e v_2 i vettori dello *Span*) $Span(v_1, v_2) = Span(v_1, v_2, X)$ e a livello dimensionale $dimSpan(v_1, v_2, X) = dimW$.
Se consideriamo v_1 e v_2 come colonne di una matrice 4×2, allora si ha che W è l'immagine della matrice $(v_1|v_2)$, in quanto è lo *Span* delle colonne:

$$W = Im \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mentre se consideriamo v_1, v_2 e X come colonne di una matrice 4×3, allora si ha che $Span(v_1, v_2, X)$ è l'immagine della matrice $(v_1|v_2|X)$:

$$Span(v_1, v_2, X) = Im \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 3 & 1 & y \\ -2 & 2 & z \\ 1 & 2 & t \end{pmatrix}$$

Ma tornando alle dimensioni si ha che $dimSpan(v_1, v_2, X) = dimIm(v_1|v_2|X) = rnk(v_1|v_2|X) = dimW = dimIm(v_1|v_2) = rnk(v_1|v_2)$ quindi le due matrici, se $X \in W$, devono avere lo stesso rango. Troviamo con l'algoritmo di Gauss-righe il rango di $(v_1|v_2|X)$ (implicitamente troviamo anche il rango di $(v_1|v_2)$ in quanto è la sottomatrice di sinistra):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 3 & 1 & y \\ -2 & 2 & z \\ 1 & 2 & t \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \mapsto R_3 + 2R_1, R_4 \mapsto R_4 - R_1]{R_2 \mapsto R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y - 3x \\ 0 & 2 & z + 2x \\ 0 & 2 & t - x \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \mapsto R_3 - 2R_2]{R_4 \mapsto R_4 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y - 3x \\ 0 & 0 & z + 8x - 2y \\ 0 & 0 & t + 5x - 2y \end{pmatrix}$$

Notiamo ora che la matrice $(v_1|v_2)$ ha rango 2, in quanto ha 2 pivot. Ma allora, poiché abbiamo imposto $X \in W$, anche $rnk(v_1|v_2|X)$ deve essere 2, ovvero gli elementi di posto $3,3$ e $4,3$ devono essere nulli (sono i candidati pivot per un'eventuale scalinatura). Ma allora abbiamo che $X \in W \iff z + 8x - 2y = 0$ e $t + 5x - 2y = 0$. Queste due sono allora le equazioni che descrivono l'appartenenza di un vettore a W:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; z + 8x - 2y = 0,\ t + 5x - 2y = 0 \right\}$$

10.6 Non-Esercizio: Mutua posizione di due rette affini in $\mathbb{R}^3$

Definizione: $r \subset \mathbb{R}^3$ è una retta affine se è il traslato di un sottospazio di dimensione 1 (tale sottospazio prende il nome di giacitura di r): $r = v_0 + W$ con $v_0 \in \mathbb{R}^3$ e $W \subset \mathbb{R}^3$ sottospazio vettoriale tale che $dimW = 1$.

Ogni retta affine la possiamo pensare come soluzione di un sistema lineare $A \cdot X = b$ tale per cui il Ker della matrice $A \in M(m, 3, \mathbb{R})$ abbia dimensione 1. È necessario a tal proposito che $rnk(A) = rnk(A|b)$ in quanto si richiede che il sistema sia risolubile e in particolare si deve avere che $rnk(A) = rnk(A|b) = 2$ in quanto la dimensione dello spazio delle soluzioni è uguale alla differenza tra il numero delle colonne di A (3) e il rango di $A \implies$ vogliamo che la dimensione dello spazio delle soluzioni sia 1, quindi $rnk(A) = 2$. Notiamo che non conosciamo il numero di equazioni del sistema, ma sappiamo che $rnk(A) = 2$, quindi, una volta applicato Gauss, troveremo solo 2 righe non nulle: tutte le altre equazioni sono superflue e possiamo eliminarle dal sistema (che rimane equivalente a quello iniziale): possiamo supporre senza perdita di generalità che il numero di equazioni sia 2. A questo punto il fatto che $rnk(A|b) = rnk(A)$ è scontato se $rnk(A) = 2$ (non può aumentare). Quindi posso pensare una retta affine come la soluzione di un sistema lineare di 2 equazioni in 3 incognite con il rango della matrice dei coefficienti uguale a 2.

MUTUE POSIZIONI: Siano $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^3$ due rette affini: scriviamole come $r_1 = v_1 + W_1$ e $r_2 = v_2 + W_2$. Queste due rette possono essere:
· Incidenti: se $r_1 \cap r_2 \neq \emptyset$ (o incidono in un punto o sono la stessa retta).
· Parallele: se $W_1 = W_2$ (si scrive $r_1 \,//\, r_2$).
· Sghembe: se $r_1 \cap r_2 = \emptyset$ e $W_1 \neq W_2$.
Se invece descriviamo le rette affini come soluzioni di sistemi lineari come facciamo a dire se sono incidenti, parallele o sghembe? Sia r_1 la soluzione del sistema lineare $A_1 \cdot X = b_1$ con $A_1 \in M(2, 3, \mathbb{R})$, $b_1 \in \mathbb{R}^2$ e $rnk(A_1) = 2$ e sia r_2 la soluzione del sistema lineare $A_2 \cdot X = b_2$ con $A_2 \in M(2, 3, \mathbb{R})$, $b_2 \in \mathbb{R}^2$ e $rnk(A_2) = 2$, ovviamente la giacitura di r_1 è $W_1 = KerA_1$ che ha dimensione 1 per la formula di nucleo e immagine ($rnk(A_1) = dimIm(A_1) = 2$) e la giacitura di r_2 è $W_2 = KerA_2$ che ha dimensione 1 per la formula di nucleo e immagine ($rnk(A_2) = dimIm(A_2) = 2$). Per capire la mutua posizione di r_1 e r_2 dobbiamo prima capire come si intersecano le giaciture (e si intersecano sempre, in quanto sono sottospazi e l'origine l'hanno in comune): studiamo quindi $W_1 \cap W_2$: dato che W_1 sono le soluzioni di $A_1 \cdot X = 0$ e W_2 sono le soluzioni di $A_2 \cdot X = 0$, mettendo insieme le due matrici otteniamo la condizione

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che può essere pensato come sistema lineare: come si intersecano i nuclei di A_1 e A_2. La dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema di sopra è 3-$rnk(\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix})$ e quindi

$$W_1 \cap W_2 = 3 - rnk(\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix})$$

Ma quanto può valere $rnk(\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix})$? Sicuramente non più di 3 in quanto la matrice ha taglia 4×3, ma è vero anche che e prime due righe della matrice sono linearmente indipendenti in

quanto sono le righe di A_1, quindi al minimo deve essere 2. Quindi le possibili dimensioni di $W_1 \cap W_2$ sono $3-2=1$ e $3-3=0$, ovvero le giaciture possono incontrarsi o in un punto o in una retta (se sono uguali).
Tentiamo ora di capire come sono le due rette affini, una volta capito come si intersecano le giaciture. Diamo prima un'idea sul parallelismo. Separiamo i due casi trovati:

· se $rnk(\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}) = 2$ allora $W_1 = W_2$, che, riguardando le definizioni di sopra, implica che $r_1 \, // \, r_2$.

· se $rnk(\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}) = 3$, allora le giaciture si intersecano nell'origine e allora $W_1 \neq W_2$ e quindi r_1 e r_2 non sono parallele.

Cosa sappiamo dire invece su come si intersecano (o no) le due rette? $r_1 \cap r_2$ è l'insieme delle soluzioni del sistema associato a

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

(che è il sistema ottenuto mettendo insieme le equazioni di r_1 e di r_2). Quando questo sistema è risolubile, ovvero quando $r_1 \cap r_2 \neq 0$? Per Rouché-Capelli lo è quando $rnk(\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}) = rnk(\begin{pmatrix} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{pmatrix})$ che è una matrice di taglia 4×4. Poiché $rnk(\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix})$ abbiamo già visto essere o 2 o 3, per $rnk(\begin{pmatrix} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{pmatrix})$ ci sono 3 possibilità: è 2, 3 o 4.
· Se $rnk(\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 2$ allora le giaciture si intersecano nella stessa retta e le rette r_1 e r_2 sono parallele. Allora se $rnk(\begin{pmatrix} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{pmatrix}) = 2$, il sistema ha soluzione in quanto i ranghi sono uguali e se due rette sono parallele e si intersecano allora sono la stessa retta.
Se invece $rnk(\begin{pmatrix} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{pmatrix}) > 3$ allora le rette sono parallele ma non si intersecano in quanto il sistema non ha soluzione per Rouché-Capelli.
· Se $rnk(\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}) = 3$ allora le giaciture si intersecano in un punto (origine) e le rette r_1 e r_2 non sono parallele. Allora se $rnk(\begin{pmatrix} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{pmatrix}) = 3$ il sistema ha soluzione e le due rette si intersecano, quindi sono incidenti (ma non parallele).
Se invece $rnk(\begin{pmatrix} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{pmatrix}) \neq 3$ allora le rette non si intersecano in quanto il sistema non ha soluzione per Rouché-Capelli e, non essendo parallele, esse sono sghembe.

11 Esercitazione 07-12-2021

11.1 Esercizio 1

Sia $A \in A_n$ una matrice antisimmetrica di taglia $n \times n$ (ovvero tale che $A^\top = -A$) con coefficienti su un campo $\mathbb{K}$ tale che $char\mathbb{K} \neq 2$. Dimostrare che $rnk(A)$ è pari.

Dimostrazione. Premessa: Per dimostrare questa proprietà utilizzeremo l'algoritmo di Gauss, tuttavia mischieremo delle operazioni di riga e di colonna, in quanto il nostro scopo è quello di lasciare la matrice antisimmetrica.
Supponiamo di partire da A e, facendo delle operazioni di riga, giungere alla matrice B. Per quanto visto a teoria, ottenere B corrisponde a moltiplicare A a sinistra per una certa matrice $P \in GL(n, \mathbb{K})$: $B = P \cdot A$. Supponiamo ora, invece, di partire sempre da A, facendo le stesse operazioni ma sulle colonne: otteniamo la matrice C. Cosa significa fare le stesse operazioni, ma stavolta per colonna? Significa trasporre A, fare le operazioni, fatte precedentemente sulle righe di A, sulle righe di $A^\top$, ovvero moltiplicare $A^\top$ a sinistra per P, e infine ritrasporre la matrice ottenuta dopo le operazioni. Giungiamo dunque a poter affermare che $C = (P \cdot A^\top)^\top = (A^\top)^\top \cdot P^\top = A \cdot P^\top$.
Se quindi, partendo da A, faccio delle operazioni di riga e successivamente faccio le stesse operazioni di colonna ottengo $A \mapsto P \cdot A \mapsto (P \cdot A) \cdot P^\top$ e dato che $M(n, \mathbb{K})$ è un anello, $\cdot$ è associativa e posso togliere le parentesi: $A \mapsto P \cdot A \cdot P^\top$. Dimostriamo ora che se A è antisimmetrica allora $P \cdot A \cdot P^\top$ è antisimmetrica: per mostrarlo ci basta trasporre: $(P \cdot A \cdot P^\top)^\top = (P^\top)^\top \cdot A^\top \cdot P^\top = P \cdot (-A) \cdot P^\top = -(P \cdot A \cdot P^\top)$ e per definizione di antisimmetria, tale matrice è antisimmetrica.
Quindi se vogliamo fare delle operazioni di riga su una matrice e lasciarla antisimmetrica, ci basta rifare le stesse operazioni anche sulle colonne.

Dimostriamo ora la tesi per induzione su n.
Passo base: per $n = 1$, l'unica matrice antisimmetrica è $A = (0)$, che ha rango 0 ed è dunque pari.
Passo induttivo: sia $n > 1$. Distinguiamo due possibili casi:
Se A^1 (la prima colonna di A) è tutta nulla (e quindi anche A_1 è nulla) allora $rnk(A)$ è uguale al rango della sottomatrice ottenuta da A scartando la prima colonna e la prima riga (non contribuiscono nello *Span* delle righe e delle colonne) e dato che questa sottomatrice è quadrata (ma con un n più piccolo) e antisimmetrica, per induzione ha rango pari e $rnk(A)$ è pari.
Se A^1 non è nulla allora $\exists\, j \in \{1, ..., n\}$ tale che $a_{j1} = -a_{1j} \neq 0$ (chiamiamo $a_{j1} = a$). Operiamo su A con l'algoritmo di Gauss, facendo le stesse operazioni di riga e di colonna. In particolare vogliamo "avvicinare" a_{j1} e a_{1j}: portiamo a_{j1} in posizione a_{21} e a_{1j} in posizione a_{12} e facciamoli diventare degli 1 (basta dividere per a e si può fare in quanto $a \neq 0$ per ipotesi):

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & a & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a & \dots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_j \longleftrightarrow C_2]{R_j \longleftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 0 & a & \dots & \dots \\ -a & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_2 \longleftrightarrow \frac{1}{a} C_2]{R_2 \longleftrightarrow \frac{1}{a} R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots \\ -1 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Supponiamo ora di avere, ancora nella prima riga, un elemento b in posizione a_{1i} (avremo anche l'elemento $-b$ in posizione a_{1i}), possiamo trasformare b in 0, semplicemente sottraendo alla colonna i-esima la seconda colonna moltiplicata per b e alla i-esima riga la seconda riga moltiplicata per b. Formalmente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & b & \dots \\ -1 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -b & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_i \mapsto C_i - bC_2]{R_i \longleftrightarrow R_i - bR_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & \dots \\ -1 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Facendo questa operazione con tutte le colonne e tutte le righe troviamo che la prima riga conterrà un 1 in posizione $1, 2$ e poi tutti 0, mentre la prima colonna conterrà un -1 in posizione $2, 1$ e poi tutti 0. Allo stesso modo, se nella seconda riga, in posizione $2, k$ abbiamo un elemento c e quindi nella seconda colonna, in posizione $k, 2$ abbiamo l'elemento $-c$, allora, possiamo trasformare tali c e $-c$ in 0, semplicemente sommando alla k-esima colonna la prima colonna moltiplicata per c e sommando alla k-esima riga la prima riga moltiplicata ancora per c:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ -1 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & c & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -c & \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_k \mapsto C_k + cC_2]{R_k \longleftrightarrow R_k + cR_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ -1 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Facendo questa operazione con tutte le colonne e tutte le righe troviamo che la seconda riga conterrà un -1 in posizione $2, 1$ e poi tutti 0, mentre la seconda colonna conterrà un 1 in posizione $1, 2$ e poi tutti 0.
Come è fatta questa nuova matrice? È sicuramente antisimmetrica in quanto abbiamo fatto le stesse operazioni di riga e colonna, per di più ha le prima due righe nulle a parte per 1 e -1 nelle posizioni rispettivamente $1, 2$ e $2, 1$ e poi ha una sottomatrice (ottenuta scartando le prime due righe e le prime due colonne) antisimmetrica anch'essa in quanto lo era la A originale (una matrice come questa si dice diagonale a blocchi, perché ha due blocchi quadrati divisi dalla diagonale).
Quanto vale il rango di questa nuova matrice? Scambiando le prime due righe, notiamo che otteniamo due pivot rispettivamente nei posti $1, 1$ e $2, 2$. Inoltre, applicando l'algoritmo di Gauss alla sottomatrice di sopra otteniamo una matrice a gradini: quanti gradini ha? Ne ha esattamente 2 più il rango della sottomatrice... Ma la sottomatrice è antisimmetrica e ha taglia $(n-2) \times (n-2)$ e quindi per ipotesi induttiva ha rango pari (diciamo $2h$) $\Longrightarrow$ il numero di gradini della matrice è $2 + 2h \Longrightarrow$ la matrice ha rango pari.

11.2 Esercizio 2

Sia $C = \{A \in M(n, \mathbb{K}) \,|\, A \cdot B = B \cdot A \quad \forall B \in M(n, \mathbb{K})\}$ il centro di $M(n, \mathbb{K})$ ovvero l'insieme delle matrici quadrate che commutano con tutte le matrici di $M(n, \mathbb{K})$. Dimostra che $C = Span(I_n)$.

Dimostrazione. Per mostrare che questi due insiemi sono uguali dobbiamo mostrare che sussiste una doppia inclusione.

Notiamo che l'inclusione $\supset$ è ovvia, in quanto se $\lambda \in \mathbb{R}$, allora λI_n commuta con tutto $M(n, \mathbb{K})$ in quanto se $A \in M(n, \mathbb{K})$, allora $(\lambda I_n) \cdot A = \lambda A = A \cdot (\lambda I_n)$.

Dimostrare l'altra inclusione è invece più difficile. Vogliamo sfruttare il fatto che nella definizione di centro abbiamo un per ogni: se deve essere vero per ogni matrice, possiamo scegliere in maniera oculata chi è B. Sia $B = E_{11}$, e sia $A \in C$, allora necessariamente $E_{11} \cdot A = A \cdot E_{11}$: come è fatta una matrice che commuta con E_{11}? Notiamo che il prodotto $E_{11} \cdot A$ genera una matrice tale per cui la prima riga è la prima riga di A, mentre ogni altra riga è nulla (pensare al prodotto matriciale), ovvero:

$$E_{11} \cdot A = \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se invece moltiplichiamo nell'altro verso otteniamo che $A \cdot E_{11}$ è una matrice che ha la prima colonna uguale alla prima colonna di A, mentre ogni altra colonna è nulla, ovvero:

$$A \cdot E_{11} = (A^1 | 0)$$

Confrontando le due matrici, che devono essere uguali, otteniamo che la prima riga di A deve avere gli elementi di posto $a_{12} = ... = a_{1n} = 0$, mentre la prima colonna di A deve avere gli elementi di posto $a_{21} = ... = a_{n1} = 0$, ovvero se $A \in C$, allora, dato che commuta con tutto e in particolare anche con E_{11}, ha la forma

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & * & \vdots & \vdots & * \\ \vdots & \dots & * & \vdots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * & \vdots \\ 0 & * & \dots & \dots & * \end{pmatrix}$$

Ripetendo lo stesso ragionamento anche per le matrici $E_{22}, E_{33}, ..., E_{nn}$, otteniamo che i soli elementi non necessariamente nulli di A sono quelli sulla diagonale, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

Non siamo ancora arrivati però alla dimostrazione del contenimento, in quanto tutti gli elementi della diagonale sono per ora arbitrari. Continuiamo allora, con lo stesso ragionamento di prima, a moltiplicare A per alcune matrici speciali, come ad esempio E_{12}: poiché $A \in C$, necessariamente $A \cdot E_{12} = E_{12} \cdot A$. In particolare, il prodotto $E_{12} \cdot A$ genera una matrice tale per cui l'elemento di posto $1, 2$ è uguale ad a_2 (si pensi al prodotto matriciale) e tutto il resto della matrice è nullo, ovvero:

$$E_{12} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Viceversa, il prodotto $A \cdot E_{12}$ genera una matrice tale per cui l'elemento di posto $1, 2$ è uguale ad a_1 (si pensi al prodotto matriciale) e tutto il resto della matrice è nullo, ovvero:

$$E_{12} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Confrontando le due matrici, che devono essere uguali, otteniamo che $a_1 = a_2$. Reiterando con $E_{13}, ..., E_{1n}$ otteniamo $a_1 = a_2 = ... = a_n = \alpha$. Quindi la matrice A che commuta con tutte le matrici quadrate ha la forma

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha I_n$$

e appartiene chiaramente a $Span(I_n)$, ovvero $C \subset Span(I_n)$.

Dato che abbiamo dimostrato che sussiste una doppia inclusione, si ha che $C = Span(I_n)$.

11.3 Esercizio 3

Sia D l'insieme $D = \{A \in M(n, \mathbb{K}) \mid A \cdot B = B \cdot A \quad \forall B \in GL(n, \mathbb{K})\}$. Dimostra che $D = Span(I_n)$.

Dimostrazione. Per mostrare che questi due insiemi sono uguali dobbiamo mostrare che sussiste una doppia inclusione.

Notiamo che l'inclusione $\supset$ è ovvia, in quanto se $\lambda \in \mathbb{R}$, allora λI_n commuta con tutto $GL(n, \mathbb{K})$ in quanto se $A \in GL(n, \mathbb{K})$, allora $(\lambda I_n) \cdot A = \lambda A = A \cdot (\lambda I_n)$.

Per quanto riguarda l'altra inclusione, la strada di prima non è percorribile, in quanto nessuna delle E_{ij} è invertibile (hanno tutte almeno una riga/colonna nulla). Notiamo per prima cosa che $A \cdot B = B \cdot A$, dato che B è invertibile, equivale a $B^{-1} \cdot A \cdot B = A$: possiamo interpretare la nuova scrittura come un cambio di base (ricordiamo che se $M_B^{B'}(id_V)$ è una matrice di cambio di base, allora è invertibile e $(M_B^{B'}(id_V))^{-1} = M_{B'}^B(id_V)$, inoltre se B e D sono due basi di V e $f \in End(V)$, allora $M_D^D(f) = M_D^B(id_V) M_B^B(f) M_B^D(id_V)$). Quindi richiedere che $A \in D$ equivale a richiedere che l'applicazione L_A ha la stessa matrice associata in tutte le basi di $\mathbb{K}^n$ (dove la base di partenza e di arrivo coincidono). Scegliamo allora una base in maniera oculata: sia $B = \{-e_1, e_2, ..., e_n\}$ una base di $\mathbb{K}^n$. Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{21n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Consideriamo $M_B^B(L_A) = A$ la matrice associata a L_A nella base B di partenza e arrivo, come è fatta? Troviamo le colonne:

$$L_A(-e_1) = -L_A(e_1) = -A^1 = \begin{pmatrix} -a_{11} \\ -a_{21} \\ \vdots \\ -a_{n1} \end{pmatrix} \implies [L_A(-e_1)]_B = \left[\begin{pmatrix} -a_{11} \\ -a_{21} \\ \vdots \\ -a_{n1} \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ -a_{21} \\ \vdots \\ -a_{n1} \end{pmatrix}$$

Notiamo subito che dato che $M_B^B(L_A) = A$ è la matrice associata a L_A nelle basi B e B, ed essa deve essere uguale alla matrice A per quello che si è detto prima, necessariamente le colonne devono essere uguali, in particolare: $a_{21} = -a_{21}, ..., a_{n1} = -a_{n1}$ ovvero $a_{j1} = 0$ $\forall \ j \in \{2, ..., n\}$ ovvero la matrice A ha la prima riga nulla a parte l'elemento di posto $1, 1$. Reiterando il procedimento cambiando di volta in volta B, e dando a ogni elemento di B un segno - (ad esempio, la seconda colonna la possiamo trovare considerando $B = \{e_1, -e_2, ..., e_n\}$ e facendo come prima), otteniamo che la matrice A ha la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Non abbiamo ancora finito: dobbiamo fa vedere che è un multiplo di I_n: consideriamo allora la base $B' = \{e_2, e_1, e_3, ..., e_n\}$ (abbiamo scambiato e_1 e e_2): l'effetto sulla matrice è banalmente quello di scambiare le prime due righe e le prime due colonne della matrice A, ovvero

$$M_{B'}^{B'}(L_A) = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ma allora, dato che $M_{B'}^{B'}(L_A) = A$ per quanto visto sopra, si deve avere che $a_{11} = a_{22}$. Reiterando il procedimento scambiando di volta in volta il vettore e_1 con i vettori e_j della base canonica (con $j \in \{3, ..., n\}$) otteniamo $a_{11} = a_{22} = ... = a_{nn} = \alpha$ ovvero

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \alpha I_n$$

che appartiene chiaramente a $Span(I_n)$, ovvero $D \subset Span(I_n)$.

Dato che abbiamo dimostrato che sussiste una doppia inclusione, si ha che $D = Span(I_n)$.

Osservazione: La dimostrazione funziona se e solo se $char\mathbb{K} \neq 2$, in quanto cambiare segno a uno scalare appartenente a un campo di caratteristica 2 non ha senso (infatti $1 = -1$). Se $char\mathbb{K} = 2$, come possiamo ragionare? Dobbiamo necessariamente cambiare la base di partenza. Sia allora $D = \{e_1 + e_2, e_2, ..., e_n\}$ una nuova base per $\mathbb{K}^n$: come è fatta la matrice associata a L_A in questa nuova base? Studiando le colonne vediamo che, ad esempio

$$L_A(e_1+e_2) = L_A(e_1)+L_A(e_2) = A^1+A^2 \Longrightarrow [L_A(e_1+e_2)]_B = [A^1+A^2]_B = [A^1]_B+[A^2]_B =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} - a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} - a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} \\ a_{21} - a_{11} + a_{22} - a_{12} \\ \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} \end{pmatrix}$$

Quindi, dato che $M_D^D(L_A) = A$, anche la prima colonna deve essere uguale e otteniamo

$$\begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} \\ a_{21} - a_{11} + a_{22} - a_{12} \\ \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

che implica $a_{12} = 0, ..., a_{n2} = 0$ e anche $a_{11} = a_{22}$. Reiterando il procedimento sommando di volta in volta gli elementi della base canonica otteniamo la forma voluta e in particolare la tesi.

11.4 Esercizio 4

Sia E l'insieme $E = \{A \in M(n, \mathbb{K}) \mid A \cdot B = B \cdot A \ \ \forall B \in S_n\}$, dove con S_n intendiamo il sottospazio delle matrici simmetriche. Dimostra che $E = Span(I_n)$.

Dimostrazione. Per mostrare che questi due insiemi sono uguali dobbiamo mostrare che sussiste una doppia inclusione.

Notiamo che l'inclusione $\supset$ è ovvia, in quanto se $\lambda \in \mathbb{R}$, allora λI_n commuta con tutto S_n in quanto se $A \in S_n$, allora $(\lambda I_n) \cdot A = \lambda A = A \cdot (\lambda I_n)$.

Per quanto riguarda l'altra inclusione notiamo che questo esercizio è una via di mezzo tra i due precedenti, in quanto non tutte le matrici E_{ij} sono simmetriche, ma quelle per cui $i = j$ e quelle del tipo $E_{ij} + E_{ji}$ lo sono. Il fatto che e matrici del tipo E_{ii} siano simmetriche ci aiuta tanto, in quanto, come già visto nell'Esercizio 2 di questa esercitazione, le matrici A che commutano con $E_{11}, ..., E_{nn}$ sono quelle del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

Ci basta allora dimostrare che $a_1 = a_2 = ... = a_n$. Consideriamo la matrice $E_{12} + E_{21}$, essa è simmetrica in quanto ha due 1 in posizioni $1, 2$ e $2, 1$ e poi tutti zeri, e dunque $A \cdot (E_{12}+E_{21}) = (E_{12}+E_{21}) \cdot A$: ma $M(+, \cdot)$ è un anello, vale quindi la proprietà distributiva: $A \cdot E_{12} + A \cdot E_{21} = E_{12} \cdot A + E_{21} \cdot A$ e già nell'Esercizio 2 avevamo visto cosa succedeva moltiplicando $A \cdot E_{12}$ e $E_{12} \cdot A$: bisogna capire cosa succede quando moltiplichiamo $A \cdot E_{21}$

e $E_{21} \cdot A$. Nel primo caso otteniamo una matrice del tipo (si pensi al prodotto matriciale)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mentre nel secondo caso una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sommando i risultati deve essere:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo $a_1 = a_2$. Reiterando il procedimento, sommando sempre a due a due le matrici E_{ij} in modo da ottenerle simmetriche otteniamo $a_1 = a_2 = ... = a_n = \alpha$. Quindi la matrice A che commuta con tutte le matrici simmetriche ha la forma

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha I_n$$

e appartiene chiaramente a $Span(I_n)$, ovvero $E \subset Span(I_n)$.

Dato che abbiamo dimostrato che sussiste una doppia inclusione, si ha che $E = Span(I_n)$.

11.5 Esercizio 5

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano $f, g \in V^*$. Dimostrare che $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}$ tale che $f = \lambda g \iff Kerg \subset Kerf$.

Dimostrazione. Dimostriamo le due frecce separatamente:

($\Longrightarrow$) ovvio, in quanto se $f = \lambda g$, allora se $v \in Kerg$ allora $f(v) = \lambda g(v) = 0 \Longrightarrow v \in Kerf$. Per di più, se $\lambda = 0$, allora $Kerf = V$, mentre se $\lambda \neq 0$ allora $Kerf = Kerg$

($\longleftarrow$) se $f = 0$ allora $\lambda = 0$ funziona. Se invece $f \neq 0$, allora f è surgettiva in quanto $Imf \subset \mathbb{K}$ è un sottospazio di dimensione 1 (non può avere altra dimensione) e quindi per la formula di nucleo e immagine

$$dimKerf = dimV - dimImf = dimV - 1$$

ciò ci mostra che $kerf$ è un iperpiano dentro V. Ma quanto può essere la dimensione di g? Per ipotesi $Kerg \subset Kerf$ e quindi $dimKerg \leq dimKerf$, ma anche g è un funzionale, quindi è surgettivo (non può essere il fuznionale nullo altrimenti $dimKerg = dimV > dimKerf$), ovvero $dimKerg = dimKerf$: per contenimento e uguaglianza dimensionale allora $Kerg = Kerf$. Sia allora $v \in V$ tale che $v \notin Kerf = Kerg$ (quindi $f(v) \neq 0$ e $g(v) \neq 0$). Mostriamo che $\lambda = \frac{f(v)}{g(v)} \in \mathbb{K}$ funziona: verifichiamo che f e $\frac{f(v)}{g(v)}g$ rappresentano lo stesso omomorfismo su una base di V^*. Sia $Kerf \oplus Span(v)$, tale sottospazio è uguale a V in quanto $v \notin Kerf$ e quindi $Kerf$ e $Span(v)$ sono in somma diretta, per di più, dato che $Span(v) \nsubseteq Kerf$, quando sommo i due sottospazi la dimensione aumenta e poiché $dimKerf = dimV - 1$, aumentando la dimensione necessariamente otteniamo che $Span(v) \nsubseteq Kerf = V$. Ma allora se $\{u_1, ..., u_{n-1}\}$ è una base di $Kerf$, l'insieme $B = \{u_1, ..., u_{n-1}, v\}$ è una base di V. Valutiamo f su questa base: $f(u_i) = 0\ \forall i = \ ..., n-1$ in quanto $u_i \in Kerf$, mentre $f(v)$ non sappiamo quanto faccia. Valutiamo ora $\frac{f(v)}{g(v)}g$ sulla stessa base: $\frac{f(v)}{g(v)}g(u_i) = 0\ \forall i = \ ..., n-1$ in quanto $u_i \in Kerf = Kerg$, mentre $\frac{f(v)}{g(v)}g(v) = f(v)$. I due omomorfismi dunque coincidono su una base e quindi $f = \frac{f(v)}{g(v)}g$.

Osservazioni: $f, g \in V^*$ sono linearmente indipendenti se e solo se $Kerf, Kerg \neq V$ e $Kerf \neq Kerg$, che equivale a dire che $dim(Kerf \cap Kerg) = dimV - 2$ (per Grassmann).

11.6 Esercizio 6

Sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia $W \subset V$ un suo sottospazio definito da

$$W = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

Determinare $Ann(W)$.

Soluzione: L'idea è quella di definire una base di V partendo da una base di W (completare) e poi passare alla base duale. Cerchiamo allora una base di $V = \mathbb{R}^3$. Dobbiamo cercare un vettore che non stia in $Span(v_1, v_2)$ dove con v_1, v_2 intendiamo i vettori di sopra. Si verifica facilmente che il vettore

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \notin W$$

e che quindi

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

è una base di V. Cerchiamo ora i funzionale della base duale $B^* = \{v_1^*, v_2^*.v_3^*\}$: come interpretiamo v_1^*? v_1^* lo possiamo pensare come una matrice di taglia $1 \times n$ del tipo $(a_1 \ \ b_1 \ \ c_1)$ che associa al vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ il prodotto

$$v_1^*(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = (a_1 \ \ b_1 \ \ c_1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a_1x + b_1y + c_1z$$

Ma come determiniamo a_1, b_1 e c_1? Imponendo la condizione standard su v_1^*: $v_1^*(v_1) = 1$ e $v_1^*(v_2) = v_1^*(v_3) = 0$. Quindi

$$v_1^*(v_1) = a_1 + b_1 + 2c_1 = 1, \qquad v_1^*(v_2) = a_1 - b_1 = 0, \qquad v_1^*(v_3) = 3a_1 + 3b_1 + 2c_1 = 0$$

ovvero abbiamo un sistema lineare da risolvere:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + 2c_1 & = 1 \\ a_1 - b_1 & = 0 \\ 3a_1 + 3b_1 + 2c_1 & = 0 \end{cases}$$

che dà le soluzioni $a_1 = -\frac{1}{4}$, $b_1 = -\frac{1}{4}$ e $c_1 = \frac{3}{4}$, ovvero, con un abuso di notazione,

$v_1^* = \frac{1}{4}(-x-y+3z)$. Nello stesso modo otteniamo v_2^* e v_3^*:

$$v_2^*(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = (a_2 \;\; b_2 \;\; c_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a_2x + b_2y + c_2z$$

dove a_2, b_2 e c_2 li stabiliamo imponendo $v_2^*(v_1) = 0$, $v_2^*(v_2) = 1$ e $v_2^*(v_3) = 0$ e risolvendo il sistema

$$\begin{cases} a_2 + b_2 + 2c_2 & = 0 \\ a_2 - b_2 & = 1 \\ 3a_2 + 3b_2 + 2c_2 & = 0 \end{cases}$$

che dà le soluzioni $a_2 = \frac{1}{2}$, $b_2 = -\frac{1}{2}$ e $c_2 = 0$, ovvero, con un abuso di notazione, $v_2^* = \frac{1}{2}(x-y)$. Ancora, per quanto riguarda v_3^*:

$$v_3^*(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = (a_3 \;\; b_3 \;\; c_3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a_3x + b_3y + c_3z$$

dove a_3, b_3 e c_3 li stabiliamo imponendo $v_3^*(v_1) = 0$, $v_3^*(v_2) = 0$ e $v_3^*(v_3) = 1$ e risolvendo il sistema

$$\begin{cases} a_3 + b_3 + 2c_3 & = 0 \\ a_3 - b_3 & = 0 \\ 3a_3 + 3b_3 + 2c_3 & = 1 \end{cases}$$

che dà le soluzioni $a_3 = \frac{1}{4}$, $b_3 = \frac{1}{4}$ e $c_3 = -\frac{1}{4}$, ovvero, con un abuso di notazione, $v_3^* = \frac{1}{4}(x+y-z)$. Sappiamo ora che $B^* = \{v_1^*, v_2^*, v_3^*\}$ è una base di V^*. Per trovare $Ann(W)$ notiamo che, per quanto visto a teoria, $dimAnn(W) = dimV - dimW = 3 - 2 = 1$ quindi ci basta trovare un funzionale in $Ann(W)$ e il suo $Span$ sarà proprio $Ann(W)$: ricordiamo che se $g \in Ann(W)$ allora $g(W) = 0$, ma è anche vero che se v_1 e v_2 sono una base di w, allora $Ann(W) = \{g \in V^* \,|\, g(v_1) = 0,\ g(v_2) = 0\}$ (l'inclusione $\supset$ è ovvia mentre $\subset$ è vera in quanto ogni vettore di W è combinazione lineare di v_1, v_2 e g è lineare). Ma per quanto detto poc'anzi $v_3^*(v_1) = 0$ e $v_3^*(v_2) = 0$, quindi $v_3^* \in Ann(W)$ e per quanto visto $Ann(W) = Span(v_3^*)$.

Osservazione: Notiamo che per trovare a_i, b_i, c_i con $i = 1, 2, 3$ abbiamo impostato un sistema dove la colonna dei termini noti è una colonna della matrice identità: quindi, quando moltiplichiamo le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

otteniamo proprio la matrice identità I_3 (provare per credere), ovvero la matrice dei coefficienti (scritti con quell'ordine) è l'inversa della matrice ottenuta trasponendo la matrice che per colonne ha i vettori di partenza: se chiamiamo A la matrice che ha per colonne i vettori di partenza: $A^\top \cdot (A^\top)^{-1} = I_3$ e quindi ritrasponendo $A^{-1} \cdot A = I_3$ dove A^{-1} è

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

ovvero la matrice che ha per righe proprio i funzionali v_1^*, v_2^* e v_3^*, e quindi, in generale v_i^* è l'i-esima riga di A^{-1} (dove A è la matrice che ha per colonne i vettori di partenza). Questo ci offre un modo alternativo per trovare i coefficienti con i quali possiamo descrivere un funzionale.

11.7 Esercizio 7

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano $U, W \subset V$ due suoi sottospazi. Dimostra che $Ann(U + W) = Ann(U) \cap Ann(W)$ e che $Ann(U \cap W) = Ann(U) + Ann(W)$.

Dimostrazione. Dimostriamo le due uguaglianze separatamente: cominciamo dalla prima. Mostriamo che sussiste una doppia inclusione:

· $\subset$: è ovvio che $U, W \subset U + W$. Applicando l'annullatore ai sottospazi otteniamo che le inclusioni si rovesciano: se infatti $X \subset Y$, sia $g \in Ann(Y)$, ciò significa che $g(Y) = 0$, ma poiché $X \subset Y$, è vero che $g(X) = 0$, ovvero che $g \in Ann(X) \Longrightarrow Ann(Y) \subset Ann(X)$. Quindi $Ann(U+W) \subset Ann(U)$ e $Ann(U+W) \subset Ann(W) \Longrightarrow Ann(U+W) \subset Ann(U) \cap Ann(W)$.

· $\supset$: sia $g \in Ann(U) \cap Ann(W)$, vogliamo mostrare che $g \in Ann(U + W)$. Sia $v \in U + W$, allora $\exists\, u \in U$, $w \in W$ tali che $v = u + w$. Valutiamo g in v:

$$g(v) = g(u + w) = g(u) + g(w) = 0 + 0 = 0$$

in quanto $u \in U$ e $g \in Ann(U)$ e $w \in W$ e $g \in Ann(W)$. Dunque $g \in Ann(U + W)$, ovvero $Ann(U + W) \supset Ann(U) \cap Ann(W)$.

Dato che abbiamo dimostrato esserci una doppia inclusione si ha che $Ann(U + W) = Ann(U) \cap Ann(W)$.

Mostriamo ora l'altra uguaglianza: lo faremo mostrando un'inclusione e l'uguaglianza dimensionale.

· $\supset$: notiamo che $U \cap W \subset U$ e $U \cap W \subset W$, quindi, per quanto visto prima $Ann(U \cap W) \supset Ann(U)$ e $Ann(U \cap W) \supset Ann(W)$, e dato che $Ann(U)$ e $Ann(W)$ sono sottospazi, anche la loro somma è contenuta in $Ann(U \cap W)$, ovvero $Ann(U \cap W) \supset Ann(W) + Ann(U)$.

· UGUAGLIANZA DIMENSIONALE: mostriamolo in dimensione finita. Poiché conosciamo una formula esplicita per la dimensione degli annullatori si sa che

$$dimAnn(U \cap W) = dimV - dim(U \cap W) = dimV - dimU - dimW + dim(U + W)$$

e, per Grassmann

$$dim(Ann(W) + Ann(U)) = dimAnn(W) + dimAnn(U) - dim(Ann(U) \cap Ann(W)) =$$

$$= dimV - dimW + dimV - dimU - dim(Ann(U) \cap Ann(W))$$

Ma abbiamo dimostrato al primo punto che $Ann(U + W) = Ann(U) \cap Ann(W)$ e quindi hanno anche la stessa dimensione, ovvero $dimAnn(U + W) = dim(Ann(U) \cap Ann(W))$: sostituendo sopra:

$$dim(Ann(W) + Ann(U)) = 2dimV - dimW - dimU - dim(Ann(U) \cap Ann(W)) =$$

$$= 2dimV - dimW - dimU - dimAnn(U+W) = 2dimV - dimW - dimU - dimV + dim(U+W) =$$

$$= dimV - dimU - dimW + dim(U + W)$$

che è lo stesso risultato che avevamo ottenuto per $dimAnn(U \cap W)$.

Quindi, per contenimento e uguaglianza dimensionale, $Ann(U \cap W) = Ann(U) + Ann(W)$.

11.8 Esercizio 8

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita e siano $U, W \subset V$ due suoi sottospazi. Dimostra che $Z(U + W) = Z(U) \cap Z(W)$ e che $Z(U \cap W) = Z(U) + Z(W)$.

Dimostrazione. Per quanto visto a teoria, se V è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $U \subset V$ è un suo sottospazio, allora, definendo l'isomorfismo canonico $\chi : V \longrightarrow V^{**}$ che associa a un vettore $v \in V$ l'applicazione $val_v \in V^{**}$, si ha che $\chi(Z(U)) = Ann(U)$ da cui $\chi^{-1}Ann(U) = Z(U)$. Applicando allora χ^{-1} alle uguaglianze dell'Esercizio 7 otteniamo $\chi^{-1}(Ann(U + W)) = Z(U + W) = \chi^{-1}(Ann(U) \cap Ann(W)) = Z(U) \cap Z(W)$ e $\chi^{-1}(Ann(U \cap W)) = Z(U \cap W) = \chi^{-1}(Ann(U) + Ann(W)) = Z(U) + Z(W)$.

Osservazione: Da quanto detto qui, e dal fatto che $Z(Span(g)) = Z(\lambda g) = \{v \in V \mid \lambda g(v) = 0\} = \{v \in V \mid g(v) = 0\} = Kerg$,segue immediatamente che $Z(Span(g_1, ..., g_k)) = Z(Span(g_1) + ... + Span(g_k)) = Z(Span(g_1)) \cap ... \cap Z(Span(g_k)) = Kerg_1 \cap ... \cap Kerg_k$

11.9 Condizione di indipendenza lineare di funzionali

Siano $f_1, ..., f_k \in V^*$, allora $f_1, ..., f_k$ sono linearmente indipendenti $\iff dimSpan(f_1, ..., f_k) = k \iff dimZ(Span(f_1, ..., f_k)) = n - k$ in quanto $dimZ(U) = dimV^* - dimU = dimV - dimU = dimAnn(U)$. Notiamo ora che se $U \subset V^*$ e $g_1, ..., g_k$ generano U, allora $Z(U) = \{v \in V \mid g(v) = 0 \, \forall g \in U\} = \{v \in V \mid g_1(v) = ... = g_k(v) = 0\} = Kerg_1 \cap Kerg_2 \cap ... \cap Kerg_k$. Allora la condizione di sopra si riscrive come $dimZ(Span(f_1, ..., f_k)) = dim(Kerf_1 \cap ... \cap Kerf_k) = n - k$: ancora una volta una relazione tra i nuclei determina l'indipendenza lineare dei funzionali.Notiamo inoltre che tutti i nuclei di sopra sono iperpiani, infatti ogni volta che "tagliamo con un iperpiano" la dimensione o rimane uguale (caso in cui il nucleo coincide con V oppure contiene l'intersezione dei nuclei precedenti) o cala di 1: dato che stiamo tagliando k volte, e la dimensione cala di k si ha necessariamente che $dimKerf_i = n - 1$ $\forall i = 1, ..., k$.

11.10 Condizione per cui dei funzionali sono una base del duale

Siano $f_1, ..., f_n \in V^*$, allora $\{f_1, ..., f_n\}$ è una base di $V^* \iff f_1, ..., f_n$ sono linearmente indipendenti $\iff dim(Kerf_1 \cap ... \cap Kerf_n) = n - n = 0 \iff Kerf_1 \cap ... \cap Kerf_n = \{0\}$.

12 Esercitazione 10-12-2021

12.1 Esercizio 1

Sia $A \in M(m, n, \mathbb{K})$ e sia $W = KerA \subset \mathbb{K}^n$. Determinare $Ann(W)$ e dare una risposta alla seguente domanda: come sono fatti gli iperpiani di $\mathbb{K}^n$ che contengono W?

Soluzione: Cominciamo con il nucleo: sappiamo che il nucleo di una matrice è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $A \cdot x = 0$ dove $x \in \mathbb{K}^n$ e $0 \in \mathbb{K}^m$ è il vettore nullo. Riscrivendo il sistema con le righe si ha:

$$\begin{cases} A_1 \cdot x = 0 \\ \dots \\ A_m \cdot x = 0 \end{cases}$$

dove $A_i \in M(1, n, \mathbb{K}) \cong (\mathbb{K}^n)^*$, quindi per ogni $i \in \{1, ..., m\}$ esiste un funzionale f_i di $(\mathbb{K}^n)^*$ tale che $A_i \longleftrightarrow f_i$, ovvero $f_i(x) = A \cdot x$. Ritornando al sistema di sopra, risolverlo significa trovare tutti gli $x \in \mathbb{K}^n$ tali che $\forall\, i \in \{1, ..., m\}$, $f_i(x) = 0$: stiamo vedendo il nucleo di A come un'intersezione di nuclei delle f_i, che, per quanto visto nell'Esercizio 8 della scorsa esercitazione, è un luogo di zeri:

$$W = Kerf_1 \cap ... \cap Kerf_m = Z(Span(f_1, ..., f_m))$$

allora l'annullatore di W è proprio $Span(f_1, ..., f_m)$, in quanto Z e Ann sono funzioni inverse:

$$Ann(W) = Ann(KerA) = Span(f_1, ..., f_m)$$

Per rispondere alla domanda successiva invece, consideriamo $H \subset \mathbb{K}^n$ un iperpiano che contiene W: possiamo pensare un iperpiano come un luogo di zeri, infatti sappiamo che ogni iperpiano è descritto da una sola equazione lineare: $H = \{x \in \mathbb{K}^n \,|\, G(x) = 0\}$ dove con $G(x)$ indichiamo un'equazione lineare che dipende dalle n coordinate di x, e che dunque può essere pensato come un elemento dello spazio $(\mathbb{K}^n)^*$: $G \in (\mathbb{K}^n)^*$. Ma allora H di sopra è proprio $KerG$: $H = \{x \in \mathbb{K}^n \,|\, G(x) = 0\} = KergG$: posso pensare ogni iperpiano come nucleo di un funzionale.
Per quanto visto nell'Esercizio 8 della scorsa esercitazione si ha che $KerG = Z(Span(G))$ e quindi l'iperpiano è il luogo di zeri di $SpanG$: $H = Z(SpanG)$.
Riscriviamo ora la condizione di inclusione $W \subset H$ in termini di annullatore: per quanto visto a teoria si ha che $H \supset W \iff Ann(H) \subset Ann(W)$.Ma $Ann(W) = Span(f_1, ..., f_m)$ e $Ann(H) = Ann(Z(SpanG)) = SpanG$ e dunque l'inclusione di sopra è vera se e solo se $G \in Span(f_1, ..., f_m)$. Abbiamo dunque caratterizzato un iperpiano che contiene il nucleo: la sua equazione deve essere combinazione lineare delle equazioni dei funzionali che rappresentano le righe della matrice.

Definiamo "fascio di iperpiani passanti per W" l'insieme degli iperpiani che contengono W e ogni iperpiano appartenente al fascio è del tipo: $H = \{x \in \mathbb{K}^n \,|\, \alpha_1 f_1(x) + ... + \alpha_m f_m(x) = 0\}$ al variare di $\alpha_i \in \mathbb{K}$ non tutti nulli.

12.2 Esercizio 2

Sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $F = L_A$, dove A è la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

e sia $F^\top : (\mathbb{R}^2)^* \longrightarrow (\mathbb{R}^3)^*$ l'applicazione trasposta. Mostrare che $ImF^\top = Ann(KerF)$, $KerF^\top = Ann(ImF)$ e che se $B \subset V$ e $D \subset W$ sono due basi e B^* e D^* sono le basi duali, allora $M^{D^*}_{B^*}(F^\top) = (M^B_D(F))^\top$ (sono cose già viste in astratto a teoria).

Dimostrazione. Descriviamo in primo luogo come è fatta l'applicazione $F^\top$: sia $g \in (\mathbb{R}^2)^*$: tale funzionale sarà qualcosa del tipo $g(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = ax + by$ con $a, b \in \mathbb{R}$, che può essere visto come matrice di taglia 1×2 (ricordiamo che $(\mathbb{R}^2)^* \cong M(1, 2, \mathbb{K})$): $g \longleftrightarrow (a \;\; b)$.

Cerchiamo ora di capire chi è l'immagine tramite $F^\top$ del funzionale g: per definizione $F^\top(g) = g \circ F$ che è un funzionale di $(\mathbb{R}^3)^*$: valutandolo sul vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ si ottiene

$$F^\top(g)(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = g(F(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix})) = g(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = g(\begin{pmatrix} x+2y-z \\ -x-y+2z \end{pmatrix}) =$$

$$= a(x+2y-z) + b(-x-y+2z) = (a-b)x + (2a-b)y + (-a+2b)z$$

Dal punto di vista matriciale, $F^\top$ manda la matrice $(a \;\; b)$ in: $(a \;\; b) \mapsto (a-2b \;\; 2a-b \;\; -a+2b)$, che possiamo scrivere anche come $a(1 \;\; 2 \;\; -1) + b(-2 \;\; -1 \;\; 2)$. Dato che $a, b \in \mathbb{R}$, abbiamo una descrizione esplicita di $ImF^\top$:

$$ImF^\top = Span((1 \;\; 2 \;\; -1), (-2 \;\; -1 \;\; 2)) = Span(x+2y-z, -x-y+2z)$$

Facciamo allora vedere che $Ann(KerF) = ImF^\top$: cerchiamo di definire $Ann(KerF)$. Intanto $KerF = KerA$, ovvero è lo spazio delle soluzioni di $A \cdot x = 0$, che equivale al sistema lineare:

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ -x-y+2z=0 \end{cases}$$

Ma allora l'annullatore di tale nucleo corrisponde all'insieme dei funzionali che si annullano negli elementi del nucleo, che sono esattamente le combinazioni lineari dei funzionali descritti nelle righe del sistema: $Ann(KerF) = Span(x+2y-z, -x-y+2z)$, che, come voluto, equivale a $ImF^\top$.

Facciamo vedere ora che $KerF^\top = Ann(ImF)$: chiediamoci prima chi sia ImF: per capire chi è ImF, studiamo ImA e in primo luogo troviamo il suo rango: essendo A una matrice di taglia 2×3, essa non può avere rango maggiore di 2. Per di più la seconda riga NON è chiaramente multipla della prima, ovvero le due righe sono linearmente indipendenti $\Longrightarrow$ $rnkA = 2$, ovvero $dimImF = 2$. Dato che $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e la sua immagine ha dimensione 2, essa coincide con il codominio: $ImF = \mathbb{R}^2$: per motivi teorici $Ann(\mathbb{R}^2) = \{0\}$, in quanto l'unica applicazione che si annulla su tutto $\mathbb{R}^2$ è l'applicazione nulla. Cerchiamo ora $KerF^\top$: $F^\top$, in forma matriciale, manda la matrice 1×2 $(a \;\; b)$ in: $(a \;\; b) \mapsto (a-2b \;\; 2a-b \;\; -a+2b)$. Tale matrice di arrivo è uguale alla matrice nulla $(0 \;\; 0 \;\; 0)$ se e solo se $a-2b=0$, $2a-b=0$, $-a+2b=0$ contemporaneamente, ovvero se e solo se $a=b=0$. Quindi $KerF^\top = \{0\}$ (dove 0 è l'applicazione nulla) che è uguale a quanto visto sopra: ciò ci dimostra anche che $F^\top$ è iniettiva.

Mostriamo ora l'ultima identità. Sia

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^2$$

una base di $\mathbb{R}^2$ e sia

$$D = Can_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Determiniamo innanzitutto le basi duali B^* e Can^*: $Can^* = \{x, y, z\}$ banalmente, mentre per trovare B^*, bisogna determinare i due funzionali v_1^* e v_2^* (che, con abuso notazionale, saranno della forma $v_1^* = ax + by$ e $v_2^* = cx + dy$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) tali che $v_1^*(v_1) = 2a + b = 1$ e $v_1^*(v_2) = -a + b = 0$ e $v_2^*(v_1) = 2c + d = 0$ e $v_2^*(v_2) = -c + d = 1$: risolvendo i sistemi associati otteniamo $v_1^* = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y$ e $v_2^* = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y$. Si ha quindi che $B^* = \{\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y, -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\}$.

Troviamo adesso la matrice $M_B^{Can}(F)$ associata a F nelle due basi scelte di sopra: troviamo le colonne di $M_B^{Can}(F)$:

$$\left[F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})\right]_B = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Big[F(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix})\Big]_B = \Big[\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\-1 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\Big]_B = \Big[\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\Big]_B = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

dove per trovare le coordinate di $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ ci è bastato notare che se $v \in V$ e $B = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$ è un base, allora, se $B^* = \{v_1^*, ..., v_n^*\}$ è la base duale si ha che

$$[v]_B = \begin{pmatrix}v_1^*(v)\\\dots\\v_n^*(v)\end{pmatrix}$$

Finiamo con la terza colonna:

$$\Big[F(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix})\Big]_B = \Big[\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\-1 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\Big]_B = \Big[\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\Big]_B = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{5}{3}\end{pmatrix}$$

Abbiamo dunque che $M_B^{Can}(F)$ è

$$M_B^{Can}(F) = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\-1 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3}\end{pmatrix}$$

Cerchiamo ora $M_{Can^*}^{B^*}(F^\top)$: allo stesso modo, troviamo le sue colonne:

$$[F^\top(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y)]_{Can^*} = [F^\top((\frac{1}{3}\ \ \frac{1}{3}))]_{Can^*} = [(0\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{1}{3})]_{Can^*} = \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$[F^\top(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y)]_{Can^*} = [F^\top((-\frac{1}{3}\ \ \frac{2}{3}))]_{Can^*} = [(-1\ \ -\frac{4}{3}\ \ \frac{5}{3})]_{Can^*} = \begin{pmatrix}-1\\-\frac{4}{3}\\\frac{5}{3}\end{pmatrix}$$

ricordando che $F^\top((a\ \ b)) = (a - b\ \ 2a - b\ \ -a + 2b)$. Ma allora

$$M_{Can^*}^{B^*}(F^\top) = \begin{pmatrix}0 & -1\\\frac{1}{3} & -\frac{4}{3}\\\frac{1}{3} & \frac{5}{3}\end{pmatrix}$$

che è proprio $(M_B^{Can}(F))^\top$: ciò dimostra la tesi.

12.3 Esercizio 3

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e sia $W \subset V$ un suo sottospazio. Definiamo l'inclusione $i : W \hookrightarrow V$ che manda $w \mapsto w$ (notare che è iniettiva) e la proiezione $\pi : V \longrightarrow {}^V\!/_W$ (notare che è surgettiva) che manda un vettore v nella sua classe di equivalenza. Determinare nucleo e immagine delle trasposte.

Soluzione: partiamo considerando l'inclusione. Notiamo che i non è nient'altro che la restrizione dell'identità a W, infatti, come l'identità manda un vettore in sé stesso, ma lo fa solo di alcuni vettori di V, ovvero quelli di W: $i = id_{|_W}$. Definiamo $i^\top : V^* \longrightarrow W^*$ che associa al funzionale g la composizione $g \circ i$, ovvero $g \mapsto g \circ i = g \circ id_{|_W} = g_{|_W}$. Vogliamo trovare $Im(i^\top)$, per motivi teorici sappiamo che $Im(i^\top) = Ann(Ker(i))$, ma $Ker(i) = \{0\}$ in quanto i è iniettiva. Ne segue che $Im(i^\top) = Ann(\{0\})$, ma per definizione $Ann(\{0\})$ è l'insieme dei funzionali che si annullano in 0, e visto che i funzionali sono omomorfismi, essi si annullano sempre in 0, ne segue che la $i^\top$ è surgettiva: $Ann(\{0\}) = W^*$. Viceversa $Ker(i^\top) = Ann(Im(i)) = Ann(W)$.
Consideriamo invece la proiezione al quoziente π. La sua trasposta è l'applicazione $\pi^\top : ({}^V\!/_W)^* \longrightarrow V^*$: notiamo che c'è un problema di buona definizione in quanto gli elementi del quoziente sono classi di equivalenza. Possiamo tuttavia trovare il nucleo e l'immagine di tale applicazione: $Ker\pi^\top = Ann(Im\pi) = Ann({}^V\!/_W) = \{0\}$ in quanto l'unica applicazione che annulla tutto lo spazio per definizione è l'applicazione nulla: notiamo che $\pi^\top$ è iniettiva. Viceversa: $Im\pi^\top = Ann(Ker\pi) = Ann(W)$ (ricorda che il nucleo di una proiezione al quoziente è il sottospazio per cui si quozienta): se allora restringiamo il codominio all'immagine si ha che $\pi^\top : ({}^V\!/_W)^* \longrightarrow Ann(W)$ è un isomorfismo (canonico), ovvero che

$$({}^V\!/_W)^* \cong Ann(W)$$

.

12.4 Esercizio 4

Sia $A \in M(3, \mathbb{R})$ definita da

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trovare il suo determinante.

Soluzione: troviamo il suo determinante tramite lo sviluppo di Laplace sulla prima riga. Si ricorda che lo sviluppo di Laplace è determinato dalla formula

$$detA = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_{1i} detA^{\cancel{i}}_{\cancel{1}}$$

Troviamo esplicitamente lo sviluppo: concentriamoci sull'elemento di posto $1, 1$: sviluppiamo $(-1)^{1+1} = 1$, cerchiamo l'elemento di posto $1, 1$: -1. Troviamo il determinante della matrice ottenuta togliendo la prima riga e la prima colonna di A:

$$detA^{\cancel{1}}_{\cancel{1}} = det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 - (-2 \cdot 0) = 0$$

Quindi il primo addendo della somma è $0 \cdot 1 \cdot (-1) = 0$. Troviamo ora gli altri addendi della somma: sviluppiamo $(-1)^{1+2} = -1$, cerchiamo l'elemento di posto $1, 2$: 3. Troviamo il determinante della matrice ottenuta togliendo la prima riga e la seconda colonna di A:

$$detA^{\cancel{2}}_{\cancel{1}} = det \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot 1 - (-2 \cdot 1) = 1$$

Quindi il secondo addendo della somma è $1 \cdot 3 \cdot (-1) = -3$. Sviluppiamo $(-1)^{1+3} = 1$, cerchiamo l'elemento di posto $1, 3$: 2. Troviamo il determinante della matrice ottenuta togliendo la prima riga e la terza colonna di A:

$$detA^{\cancel{3}}_{\cancel{1}} = det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot 0 - (0 \cdot 1) = 0$$

Quindi il terzo addendo della somma è $0 \cdot 2 \cdot 1 = 0$. Ne segue che $detA = 0 - 3 + 0 = -3$.

Mostriamo che il risultato non dipende dalla colonna per la quale sviluppiamo: per esempio, sviluppiamo il determinante rispetto alla terza colonna.
Più compattamente, scriviamo il calcolo del determinante:

$$detA = 2(-1)^{1+3} det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2(-1)^{2+3} det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1(-1)^{3+3} det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$2 \cdot 1 \cdot (-1 \cdot 0 - 0 \cdot 1) - 2 \cdot (-1) \cdot (1 \cdot 0 - 3 \cdot 1) + 1 \cdot 1 \cdot (1 \cdot 0 - (-1) \cdot 3) = 0 - 6 + 3 = -3$$

che è concorde a quanto trovato sopra.

Tuttavia, nessuno dei due calcoli precedenti è efficiente, poiché né nella prima riga, né nell'ultima colonna compaiono degli zeri: in generale, se si vuole calcolare il determinante di una matrice, si cerca di sviluppare rispetto alla riga o alla colona che contiene più zeri possibili, questo perché quando moltiplichiamo nello sviluppo per gli elementi di poso i, j che contengono uno zero, sappiamo subito che otteniamo un risultato nullo, e dunque non dobbiamo neanche calcolare il determinante della sottomatrice! Allora, il metodo più efficiente è sviluppare rispetto alla seconda colonna, che contiene ben due 0! Nel calcolo finale interverrà così solo l'elemento di posto $1, 2$:

$$detA = (-1)^{1+2} 3 det \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -3(-1 + 2) = -3$$

Notiamo che da ciò segue che la matrice A è invertibile.

Osservazione: Se la matrice non contiene zeri, possiamo tentare, tramite operazioni elementari, di "abbellirla" un po', facendo comparire degli zeri. Ricordiamo tuttavia che

scambiando due righe/colonne il determinante cambia segno (per alternanza multilineare sulle colonne e di conseguenza sulle righe per invarianza per trasposizione), moltiplicando una riga/colonna per uno scalare $\lambda \neq 0$, il determinante viene moltiplicato per λ. Invece, sommando a una riga/colonna un'altra riga/colonna, il determinante non cambia. Il motivo di ciò è che, per quanto visto a teoria, fare operazioni elementari sulle righe di una matrice A (rispettivamente sulle colonne) equivale a moltiplicare A a sinistra (rispettivamente a destra)per l matrice elementare E, ottenuta facendo le stese operazioni sulla matrice identità. Allora, se B è la matrice ottenuta da A facendo delle operazioni di riga si ha che $B = E \cdot A$ e per Binet $detB = det(E \cdot A) = detE \cdot detA$.
Facendo dunque un'operazione del primo tipo (scambio) si ottiene che $E \mapsto E^*$ (dove con E^* si intende la matrice che otteniamo scambiando due righe di E) e dunque $det(E^* \cdot A) = detE^* \cdot detA = -detA$ (in quanto $detE^* = -1$ banalmente). Se invece facciamo un'operazione di moltiplicazione di una riga per uno scalare (diciamo λ), si ha che $E \mapsto E^*$ (dove con E^* si intende la matrice che ha una riga moltiplicata per lo scalare λ) e quindi $det(E^* \cdot A) = det(E^*) \cdot detA = \lambda detA$, in quanto $detE^* = \lambda$ banalmente. Infine, se sommiamo a una riga un'altra riga, mandando $E \mapsto E^*$ si ha che $detA = det(E^* \cdot A) = detA$, in quanto $detE^* = 1$: infatti partendo da $E = I_n$ si ha che sommando a una riga i una riga j di E, otteniamo una matrice triangolare inferiore, che, per motivi teorici, ha come determinante il prodotto degli elementi sulla diagonale: essendo tutti 1 si ha che $detE^* = 1$.

12.5 Esercizio 5

Sia $A \in M(4, \mathbb{R})$ definita da

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Trovare il suo determinante.

Soluzione: Ragionando come detto sopra, conviene sfruttare la riga, o la colonna con più zeri. In particolare notiamo che la quarta colonna ha 2 zeri, quindi è una buona candidata per lo sviluppo. Tuttavia, notiamo che possiamo abbellirla ancora di più, facendo comparire un altro zero, eseguendo operazioni elementari. In particolare, sottraendo alla quarta riga il doppio della prima riga, otteniamo uno 0 in posizione $4, 4$.

$$detA = det \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Adesso la situazione si è semplificata parecchio, in quanto dobbiamo sviluppare solo in rapporto all'elemento di posto $1, 4$:

$$detA = 1 \cdot (-1)^{1+4} det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

dobbiamo ora calcolare il determinante di una matrice 3×3: come prima, dato che essa non ha zeri, eseguiamo operazioni elementari per far sì che compaiano degli zeri. In particolare, se raccogliamo un 3 nella terza riga e lo portiamo fuori dalla matrice (possiamo farlo per la linearità del determinante) otteniamo

$$det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} = 3det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Notiamo adesso che sottraendo alla prima riga la terza, otteniamo due zeri nelle posizioni $1, 2$ e $1, 3$ (e il determinante non cambia):

$$3det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 3det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot (-1)^{1+3} det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 6(2 \cdot (-2) - (-3 \cdot 1)) = -6$$

Otteniamo quindi, sostituendo sopra, che

$$detA = 1 \cdot (-1)^{1+4} det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} = -(-6)$$

Notiamo che da ciò segue che la matrice A è invertibile.

12.6 Esercizio 6

Sia $A \in GL(3, \mathbb{R})$ definita da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Determinare la sua inversa con la matrice aggiunta.

Soluzione: Cominciamo trovando $detA$, che è necessario per la costruzione della matrice inversa tramite aggiunta. Dal momento che la matrice di sopra non è molto "bella", eseguiamo le operazioni elementari $C_2 \mapsto C_2 - C_1$ e $C_3 \mapsto C_3 - C_1$ per far comparire degli zeri e calcoliamo il determinante con Laplace:

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 + 1 = 3$$

Cerchiamo ora i coefficienti dell'inversa: dobbiamo analizzare coefficiente per coefficiente. Chi è a_{11}^{-1}? Dobbiamo calcolare

$$a_{11}^{-1} = \frac{1}{detA}(-1)^{1+1} detA^{\cancel{1}}_{\cancel{1}} = \frac{1}{3} det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(12 - 3) = 3$$

Chi è a_{12}^{-1}? Dobbiamo calcolare

$$a_{12}^{-1} = \frac{1}{detA}(-1)^{1+2} detA^{\cancel{1}}_{\cancel{2}} = -\frac{1}{3} det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}(4 - 3) = -\frac{1}{3}$$

Chi è a_{13}^{-1}? Dobbiamo calcolare

$$a_{13}^{-1} = \frac{1}{detA}(-1)^{1+3} detA^{\cancel{1}}_{\cancel{3}} = \frac{1}{3} det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(1 - 3) = -\frac{2}{3}$$

Chi è a_{21}^{-1}? Dobbiamo calcolare

$$a_{21}^{-1} = \frac{1}{detA}(-1)^{2+1} detA^{\cancel{2}}_{\cancel{1}} = -2\frac{1}{3} det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}(8 - 2) = -2$$

Chi è a_{22}^{-1}? Dobbiamo calcolare

$$a_{22}^{-1} = \frac{1}{detA}(-1)^{2+2} detA^{\cancel{2}}_{\cancel{2}} = \frac{1}{3} det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(4 - 2) = \frac{2}{3}$$

Chi è a_{23}^{-1}? Dobbiamo calcolare

$$a_{23}^{-1} = \frac{1}{detA}(-1)^{2+3} detA^{\cancel{2}}_{\cancel{3}} = -\frac{1}{3} det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}(1 - 2) = \frac{1}{3}$$

Chi è a_{31}^{-1}? Dobbiamo calcolare

$$a_{31}^{-1} = \frac{1}{detA}(-1)^{3+1} detA^{\cancel{3}}_{\cancel{1}} = \frac{1}{3} det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(6 - 6) = 0$$

Chi è a_{32}^{-1}? Dobbiamo calcolare

$$a_{32}^{-1} = \frac{1}{detA}(-1)^{3+2} detA^{\cancel{3}}_{\cancel{2}} = -\frac{1}{3} det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}(3 - 2) = -\frac{1}{3}$$

Chi è a_{33}^{-1}? Dobbiamo calcolare

$$a_{33}^{-1} = \frac{1}{detA}(-1)^{3+3}detA_{\cancel{3}}^{\cancel{3}} = \frac{1}{3}det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}(3-2) = \frac{1}{3}$$

Riscrivendo tutti i coefficienti in ordine otteniamo

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -2 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

che è effettivamente l'inversa di A.

12.7 Esercizio 7

Dimostra che se $A \in M(n, \mathbb{K})$ e $detA = 0$, allora $A \cdot adj(A) = adj(A) \cdot A = 0 \iff Im(adj(A)) \subset KerA$ e $ImA \subset Ker(adj(A))$.

Dimostrazione. Dimostriamo separatamente le due frecce:

($\Longrightarrow$) Banalmente, moltiplicando $A \cdot adj(A)$ per un generico vettore $x \in \mathbb{K}^n$ otteniamo:

$$0 = 0 \cdot x = A \cdot adj(A) \cdot x = A \cdot (adj(A) \cdot x)A \cdot Im(adj(A))$$

ovvero $Im(adj(A)) \subset KerA$. Analogamente, ma invertendo l'ordine, otteniamo che $ImA \subset Ker(adj(A))$.

($\Longleftarrow$) Se $Im(adj(A)) \subset KerA$, allora quando valutiamo il prodotto $A \cdot adj(A)$ su un vettore $x \in \mathbb{K}$ otteniamo $A \cdot adj(A) \cdot x$, ma visto che $adj(A) \cdot x \in Im(adj(A))$, necessariamente $A \cdot adj(A) \cdot x = 0$ e visto che vale per ogni x, $A \cdot adj(A) = 0$. Analogamente si dimostra che vale anche per $adj(A) \cdot A$.

13 Esercitazione 16-12-2021

13.1 Esercizio 1

Sia $A \in M(3, \mathbb{R})$ definita da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

e sia $b \in \mathbb{R}^3$ definito da $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Risolvere il sistema lineare $A \cdot x = b$.

Soluzione: Vogliamo qui utilizzare il metodo di Cramer: innanzitutto stabiliamo se la matrice è invertibile. Notiamo subito che la terza riga è la differenza tra le prime due, quindi la terza riga è linearmente dipendente dalle prime due, ergo la matrice non può essere invertibile in quanto non ha rango massimo. Cerchiamo di capire invece, sempre a livello teorico, se il sistema è risolubile: consideriamo la matrice completa $M = (A|b)$: determiniamo il suo rango (notiamo che può essere o 2 o 3).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \mapsto R_1 - R_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \mapsto R_3 - R_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché la terza riga è completamente nulla, anche in questo caso il rango è 2 e per questioni teoriche il sistema è risolubile ($rnkM = rnkA$).
Come ragionare? Notiamo che dato che la terza riga di M dipende dalle prime due, allora l'equazione associata a tale riga è superflua e può essere eliminata: ci si riduce a studiare il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

che è un sistema rettangolare. Tuttavia, per quanto detto sopra, essendo il rango di A uguale a 2, ci devono essere nella sottomatrice $A^* = A_{\not{3}}$ due colonne linearmente indipendenti e una dipendente dalle altre due: in particolare notiamo che la sottomatrice $A' = (A^*)^{\not{3}}$ è invertibile, in quanto il suo determinante è $1 - 4 = -3$: quindi la tera colonna è linearmente dipendente dalle altre due. Possiamo allora "spezzare il sistema in questo modo":

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

che è equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+z \\ 2-z \end{pmatrix}$$

che adesso possiamo risolvere con Cramer in quanto la matrice associata al sistema è invertibile. Facciamolo:

$$x = \frac{1}{detA'} det \begin{pmatrix} 1+z & 2 \\ 2-z & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3}((1+z) \cdot 1 - 2(2-z)) = \frac{1}{-3}(3z - 3) = 1 - z$$

$$y = \frac{1}{detA'} det \begin{pmatrix} 1 & 1+z \\ 2 & 2-z \end{pmatrix} = \frac{1}{-3}((2-z) \cdot 1 - 2(1+z)) = \frac{1}{-3}(-3z) = z$$

Notiamo dunque che se anche la matrice del sistema iniziale non è invertibile, possiamo ridurlo sempre a una matrice invertibile.

13.2 Esercizio 2

Siano A, B due matrici a blocchi che possono essere moltiplicate tra di loro:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

tali che A_1 abbia h colonne, A_2 ne abbia k e rispettivamente B_1 abbia h righe e B_2 k righe. Determinare il loro prodotto.

Soluzione: Ricordando che quando moltiplichiamo due matrici il prodotto lo si fa righe per colonne, l'elemento di posto $1,1$ della matrice $A \cdot B$ è il prodotto tra la prima riga di A e la prima colonna di B: ma la prima riga di A è la stringa costituita dalla prima riga di A_1 e dalla prima riga di A_2, e analogamente la prima colonna di B è la stringa costituita dalla prima colonna di B_1 e dalla prima colonna di B_3. Per quanto detto nelle ipotesi, gli elementi della prima riga di A_1 si vanno a moltiplicare solo con gli elementi della prima colonna di B_1, mentre gli elementi della prima riga di A_2 si vanno a moltiplicare solo con gli elementi della prima colonna di B_3. Ripetendo con le altre colonne e le altre righe dei blocchi A_1, A_2, B_1 e B_3, otteniamo che anche la matrice prodotto è a blocchi e ha per primo blocco l'espressione $A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_3$. Analogamente troviamo che il blocco in alto a destra è della forma $A_1 \cdot B_2 + A_2 \cdot B_4$, in basso a sinistra $A_3 \cdot B_1 + A_4 \cdot B_3$ e in basso a destra $A_3 \cdot B_2 + A_4 \cdot B_4$, ovvero:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_3 & A_1 \cdot B_2 + A_2 \cdot B_4 \\ A_3 \cdot B_1 + A_4 \cdot B_3 & A_3 \cdot B_2 + A_4 \cdot B_4 \end{pmatrix}$$

Osservazione: Ogni matrice a blocchi del tipo

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

, con A invertibile (o analogamente C), può essere scritta come prodotto tra due matrici a blocchi del tipo

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & N \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

dove I è la matrice identità e M e N sono due matrici. Dobbiamo mostrare che M e N esistono sempre:

$$\begin{pmatrix} A & M \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & N \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A \cdot N + M \cdot C \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

quindi ci chiediamo se per ogni B matrice esistono M e N matrici tali per cui $A \cdot N + M \cdot C = B$: la risposta è sì in quanto basta prendere $M = 0$ e $N = A^{-1} \cdot B$ (o analogamente $N = 0$ e $M = C^{-1} \cdot B$).

13.3 Esercizio 3

Siano $A \in M(m, n, \mathbb{K})$ e $B \in M(n, m, \mathbb{K})$. Sia t un'indeterminata: si consideri il prodotto

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} tI_m - A \cdot B & -A \\ 0 & tI_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix}$$

che è una matrice appartenente allo spazio vettoriale $M(m+n, \mathbb{K}(t))$ dove con $\mathbb{K}(t)$ designiamo il campo delle funzioni razionali su $\mathbb{K}$. Si determini il determinante del prodotto di sopra.

Soluzione: Per la regola di Binet, il determinante di un prodotto è il prodotto dei determinanti delle singole matrici, quindi ci basta analizzare il determinante matrice per matrice.
Notiamo subito che sia la prima che la terza matrice sono triangolari (rispettivamente una inferiore e una superiore): per quanto visto a teoria il determinante di una matrice triangolare è il prodotto degli elementi sulla diagonale, che, per entrambe le matrici, sono tutti 1: il determinante sia della terza matrice che dalla prima è proprio 1.
Nel caso della seconda matrice, invece, notiamo subito che è una matrice a blocchi, e per quanto visto a lezione il suo determinante è il prodotto dei determinanti dei singoli blocchi che compongono la diagonale: quindi, se chiamiamo M la seconda matrice, si ha che

$$detM = det(tI_m - A \cdot B)det(tI_n)$$

Notiamo inoltre che il determinante di tI_n è t^n, in quanto

$$tI_n = \begin{pmatrix} t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & t \end{pmatrix}$$

è diagonale e quindi il suo determinante è il prodotto degli elementi sulla diagonale. Per quanto riguarda invece $det(tI_m - A \cdot B)$, per definizione questo è proprio il polinomio caratteristico di $A \cdot B$, ovvero $p_{A \cdot B}(t)$. Quindi il determinante del prodotto di sopra è

$$det(\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} tI_m - A \cdot B & -A \\ 0 & tI_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix}) = t^n p_{A \cdot B}(t)$$

Notiamo tuttavia che se svolgiamo il prodotto delle tre matrici, per quanto visto nell'Esercizio precedente, otteniamo

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} tI_m - A \cdot B & -A \\ 0 & tI_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tI_m & -A \\ 0 & tI_n - B \cdot A \end{pmatrix} = N$$

e il determinante di questa matrice N, sempre ragionando nei termini di prima, è

$$detN = t^m det(tI_n - B \cdot A) = t^m p_{B \cdot A}(t)$$

Ma i due risultati devono essere uguali (sono i determinanti della stessa cosa), quindi

$$t^n p_{A \cdot B} = t^m p_{B \cdot A}$$

ecco dunque che abbiamo trovato una relazione tra il polinomio caratteristico di $A \cdot B$ e di $B \cdot A$: notiamo inoltre che nel caso in cui le due matrici abbiano la stessa taglia (sono quadrate), i due polinomi caratteristici sono uguali!
Per di più (in generale), i polinomi caratteristici di $A \cdot B$ e di $B \cdot A$ condividono le stesse radici non nulle e anche le molteplicità algebriche delle radici non nulle.

13.4 Esercizio 4

Sia $A \in A_n$ una matrice antisimmetrica in un campo $\mathbb{K}$ tale che $char\mathbb{K} \neq 2$, con n pari. Si dimostri che se E è la matrice $n \times n$ che ha 1 ovunque, ovvero

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

allora $det(A + cE) = detA \ \forall c \in \mathbb{K}$.

Dimostrazione. Si noti innanzitutto una cosa importante: data una matrice antisimmetrica A, quanto vale il suo determinante?
Se A è antisimmetrica, allora $A^\top = -A$, e dunque, per quanto visto a teoria $detA = detA^\top = det(-A) = (-1)^n detA$, dove il passaggio $det(-A) = (-1)^n detA$ è giustificato dal fatto che tutte le n righe di A sono moltiplicate per -1 e quindi portiamo fuori n volte -1.
Distinguiamo qui il caso n pari e n dispari: se n è dispari si ha che $detA = -detA \implies detA = 0$, concordemente a quanto avevamo dimostrato nell'Esercizio 1 dell'esercitazione del 07-12-21: infatti il rango di una matrice antisimmetrica è pari e quindi, se n è dispari, esso non può essere massimo e dunque la matrice non è invertibile.
Se invece n è pari, allora $detA = detA$, che non ci dà informazioni particolari sull'invertibilità o meno di A.

Per dimostrare che è vera quell'uguaglianza, bisogna distinguere due casi fondamentali: A invertibile e A non invertibile (come detto su, dato che n è pari non sappiamo niente sull'invertibilità di A).
Se A non è invertibile, allora $detA = 0$. Inoltre, dato che a una matrice quadrata è associato un endomorfismo, se A non è invertibile allora nemmeno l'endomorfismo lo è: quindi non è né iniettivo né surgettivo, e così la A, ovvero $KerA \neq \{0\} \implies dimKerA \geq 1$. Ma ancora per l'esercizio 1 dell'Esercitazione del 07-12, la dimensione di A è pari, ma anche n è pari, quindi necessariamente si deve avere che $dimKerA \equiv 0 \, (mod \, 2)$ per la formula di nucleo e immagine, e quindi $dimKerA \geq 2$. Notiamo inoltre che $rnkE = 1$, in quanto tutte le sue colonne sono uguali e non nulle, quindi $dimKerE = n - 1$, ovvero il nucleo di E è un iperpiano. Abbiamo già viso che se tagliamo un sottospazio con un iperpiano la dimesione può, al massimo, abbassarsi di 1 (o rimane uguale): quindi se intersechiamo $KerE$ con

$KerA$, la dimensione di tale sottospazio al minimo è 1: $dim(KerA \cap KerE) \geq 1$, ovvero $\exists v \in KerA \cap KerE$ tale che $v \neq 0$. Ma allora, se moltiplichiamo la matrice $A + cE$ con il vettore v (che vuol dire applicare l'endomorfismo associato a $A+cE$ al vettore v), otteniamo $(A + cE)(v) = Av + cEv = 0$, in quanto $v \in KerA \cap KerE$, e quindi $v \in Ker(A + cE) \Longrightarrow Ker(A + cE) \neq \{0\}$. Ma allora l'endomorfismo associato a $A + cE$ non è iniettivo, dunque non è invertibile e dunque $det(A + cE) = 0 = detA$.

Se invece A è invertibile, si ha che $detA \neq 0$. Studiamo il determinante di $A + cE$ tramite le colonne di questa matrice:

$$det(A + cE) = det(A^1 + c \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} |...|A^n + c \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix})$$

usando la linearità nella prima colonna si ha

$$det(A^1+c \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} |...|A^n+c \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}) = det(A^1|A^2+c \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} |...|A^n+c \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix})+c\cdot det(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} |A^2+c \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} |...|A^n+c \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix})$$

Usiamo ora invece la linearità sulla seconda colonna:

$$det(A^1|A^2 + c \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} |...|A^n + c \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}) + c \cdot det(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} |A^2 + c \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} |...|A^n + c \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}) =$$

$$= det(A^1|A^2|...|A^n+c \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix})+c\cdot det(A^1| \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} |...|A^n+c \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix})+c\cdot det(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} |A^2|...|A^n+c \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix})+$$

$$+c^2 \cdot det(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} |...|A^n + c \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix})$$

Notiamo che nell'ultimo addendo compaiono due colonne uguali: essendo il determinante multilineare alternante, per definizione l'ultimo termine è proprio 0. Reiterando il procedimento n volte otteniamo che molti termini si cancellano e in particolare alla fine rimangono

$$det(A + cE) = detA + c \cdot (det(A(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, 1) + A(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, 2) + ... + A(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, n)))$$

dove con $A(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, j)$ indichiamo la matrice ottenuta da A sostituendo alla colonna j la colonna $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Se chiamiamo i termini della somma tra parentesi $x_1, ..., x_n$, essi somigliano alle soluzioni di un sistema lineare :)

$$\frac{1}{detA} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{è soluzione di} \qquad A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ma allora chi è $x_1 + ... + x_n$? Posso pensare di scrivere questa somma nel seguente modo:

$$x_1 + ... + x_n = (x_1 \dots x_n) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n) A \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{detA} (x_1 \dots x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Vorremmo dimostrare che questa quantità fa 0: valutiamo allora in astratto csa succede quando facciamo il prodotto di $y^\top Ay$ (che è un elemento di $\mathbb{K}$) con $y \in \mathbb{K}^n$ (che è quello che abbiamo sopra).
Essendo $y^\top Ay \in \mathbb{K}$, quando trasponiamo non abbiamo cambiamenti: $y^\top Ay = (y^\top Ay)^\top = (y^\top)^\top A^\top y^\top = y(-A)y^\top = -y^\top Ay$ che implica $y^\top Ay = 0$ (in quanto $char\mathbb{K} \neq 2$) che è quello che volevamo. Ne segue che $det(A + cE) = detA + 0 = detA$.

13.5 Esercizio 5

Mostrare che si può ricavare il polinomio di Vandermonde come determinante di una matrice.

Soluzione: siano $x_1, ...x_n \in \mathbb{K}$. Si consideri ora la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

con $n \geq 2$. Vogliamo trovare $detA$ e in particolare far vedere che

$$detA = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

che è proprio il polinomio di Vandermonde: il determinante della matrice A si chiama per questo determinante di Vandermonde.
Dimostriamo l'uguaglianza per induzione su n:

$\cdot$ $n = 2$: basta calcolare $detA = det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1$ che è proprio il polinomio di Vandermonde.

$\cdot$ Si supponga la tesi vera per n, dimostriamo che è vero allora per $n+1$: l'idea è semplificare la prima colonna, rendendola una colonna formata da un 1 e tutti 0: l'idea è quella di sottrarre alla riga j-esima la riga $(j-1)$-esima moltiplicata per x_1 (è un'operazione di terzo tipo, quindi il determinante non cambia): otteniamo che

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_2x_1 & \dots & x_n^2 - x_nx_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-1} - x_2^{n-2}x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_n^{n-2}x_1 \end{pmatrix}$$

di cui possiamo calcolare il determinante tramite Laplace:

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_2x_1 & \dots & x_n^2 - x_2x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-1} - x_2^{n-2}x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_n^{n-2}x_1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ x_2^2 - x_2x_1 & \dots & x_n^2 - x_nx_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-1} - x_2^{n-2}x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_n^{n-2}x_1 \end{pmatrix} =$$

$$= det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{pmatrix}$$

Notiamo che possiamo portare fuori $x_2 - x_1$ dalla prima colonna: otteniamo

$$det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{pmatrix} = (x_2 - x_1) det \begin{pmatrix} 1 & \dots & x_n - x_1 \\ x_2 & \dots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{pmatrix}$$

Ma possiamo fare lo sesso per tutte le altre colonne:

$$det\begin{pmatrix} x_2-x_1 & \dots & x_n-x_1 \\ x_2(x_2-x_1) & \dots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{pmatrix} = (x_2-x_1)...(x_n-x_1)det\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

che per ipotesi induttiva è il polinomio di Vandermonde per $n-1$:

$$det\begin{pmatrix} x_2-x_1 & \dots & x_n-x_1 \\ x_2(x_2-x_1) & \dots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{pmatrix} = (x_2-x_1)...(x_n-x_1)\prod_{2\leq i<j\leq n}(x_j-x_i) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i)$$

In particolare A è invertibile se e solo se $x_1,...,x_n$ sono tutti distinti: infatti avrebbe due colonne uguali e determinante nullo (o anche perché il polinomio di Vandermonde si annullerebbe).

13.6 Esercizio 6

Siano $a, b \in \mathbb{K}$ diversi: determinare il determinante della matrice $A \in M(n, \mathbb{K})$, con $n \geq 2$, definita da

$$A = \begin{pmatrix} b & a & \dots & a \\ a & b & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & b \end{pmatrix}$$

ovvero la matrice che ha b sulla diagonale e a altrove.

Soluzione: Notiamo che il determinante della matrice A è uguale al determinante della matrice A a cui aggiungiamo una colonna formata da un 1 in prima posizione e 0 altrove e una riga randomica (la nuova matrice ha taglia $(n+1)^2$):

$$det\begin{pmatrix} b & a & \dots & a \\ a & b & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & b \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & b & a & \dots & a \\ 0 & a & b & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a & a & \dots & b \end{pmatrix}$$

Infatti sviluppando rispetto alla prima colonna otteniamo l'uguaglianza. In particolare, scegliamo una prima riga "opportuna": quella che ha tutti a nelle posizioni $1, i$ con $i = 2, ..., n+1$:

$$det\begin{pmatrix} b & a & \dots & a \\ a & b & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & b \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 0 & b & a & \dots & a \\ 0 & a & b & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a & a & \dots & b \end{pmatrix}$$

Perché proprio questa riga? Perché in questo modo possiamo fare delle operazioni di riga "utili": prendiamo la prima riga e sottraiamola a tutte le altre (il determinante non cambia!).

$$det\begin{pmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 0 & b & a & \dots & a \\ 0 & a & b & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a & a & \dots & b \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ -1 & b-a & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & b-a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & b-a \end{pmatrix}$$

Dividiamo ora tutte le colonne, dalla seconda alla $(n+1)$-esima, per $b-a$ (affinché il determinante non cambi dobbiamo rimoltiplicare fuori per $(b-a)^n$, in quanto sono n colonne a essere divise):

$$det \begin{pmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ -1 & b-a & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & b-a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & b-a \end{pmatrix} = (b-a)^n det \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b-a} & \frac{a}{b-a} & \dots & \frac{a}{b-a} \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Se adesso sommiamo alla prima colonna tutte le altre, il determinante non cambia, e inoltre notiamo che nelle posizioni $i, 1$ con $i = 2, ..., n+1$ vengono tutti zeri, in quanto sommiamo ai -1 degli 1 (tutte le posizioni che non sono nella diagonale nelle righe dalla seconda all'ultima hanno degli zeri); invece l'elemento di posto $1, 1$ diventa $1 + n(\frac{a}{b-a})$:

$$(b-a)^n det \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b-a} & \frac{a}{b-a} & \dots & \frac{a}{b-a} \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (b-a)^n det \begin{pmatrix} 1 + n\frac{a}{b-a} & \frac{a}{b-a} & \frac{a}{b-a} & \dots & \frac{a}{b-a} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice è triangolare superiore e quindi il suo determinante è il prodotto degli elementi sulla diagonale. Rileggendo le uguaglianze al contrario possiamo affermare che

$$detA = (b-a)^n (1 + n\frac{a}{b-a})$$

Osservazione: In generale per trovare il determinante di una matrice può essere utile aggiungere una colonna come quella di sopra, rapportata a un'opportuna riga.

13.7 Metodo per trovare il rango di una matrice alternativo a Gauss

Sia $A \in M(m, n, \mathbb{K})$. Definiamo sottomatrice di A una matrice ottenuta prendendo k righe e h colonne (non necessariamente consecutive) di A e intersecando gli elementi che stanno in queste righe e queste colonne. Indichiamo la sottomatrice di A di taglia $k \times h$ come segue: $A^{j_1,...,j_h}_{i_1,...,i_k}$ dove i_s $(s = 1, ..., k)$ sono le righe scelte e j_m $(m = 1, ..., h)$ le colonne scelte. Se $k = h$, la sottomatrice è quadrata e viene detta MINORE di A di taglia k.
Sia dunque M una sottomatrice di A, supponiamo che le colonne di M siano linearmente indipendenti: allora anche le stesse colonne di A sono linearmente indipendenti (le colonne di A sono un prolungamento delle colonne di M). Infatti, sia $\lambda_1 A^{j_1} + ... + \lambda_h A^{j_h} = 0$ una combinazione lineare nulla delle colonne di A (che contengono le colonne di M), cancelliamo le righe di questa combinazione lineare che non compaiono in M, otteniamo $\lambda_1 M^1 + ... + \lambda_h M^h = 0$ e dato che le colonne di M sono linearmente indipendenti per ipotesi, $\lambda_1 = ... = \lambda_h = 0$ e dunque anche le colonne $j_1, ..., j_h$ di A sono linearmente indipendenti. Questo implica che $rnkM \leq rnkA$ (non può essere maggiore perché hanno le stesse colonne linearmente indipendenti). Ne segue che il rango di A può essere pensato come il rango massimo delle sottomatrici di A (e ha senso in quanto A è sottomatrice di sé stessa).
Lavorando con i determinanti ci servono i minori di A: se troviamo un minore con determinante non nullo, allora sicuramente la matrice A ha rango maggiore del numero di colonne del minore considerato. Vogliamo dunque dimostrare la seguente:

$$rnkA = max\{h \in \mathbb{N} \mid \exists M \text{ minore di } A \text{ di ordine } h \text{ invertibile}\}$$

ovvero tale per cui $detM \neq 0$. Mostriamo l'uguaglianza con la doppia disuguaglianza. Chiamiamo $rnkA = r$ e $max\{...\} = \rho$. Ovviamente dal fatto che esista un minore di ordine ρ invertibile, segue che $rnkM = \rho$.

· $\geq$: ovvio per quanto detto sopra: i ranghi delle sottomatrici sono sempre minori o uguali dei ranghi delle matrici che le contengono. Quindi $\rho \leq r$.

· $\leq$: Sappiamo che il rango di A è r, dunque esistono r righe $A_{i_1}, ..., A_{i_r}$ (righe di A) linearmente indipendenti. Sia N la matrice formata da queste r righe di A e da tutte le colonne di A: $N = A^{1,...,n}_{i_1,...,i_r}$: la taglia di N è $r \times n$ e le sue righe sono tutte linearmente indipendenti (per costruzione), ma allora $rnkN = r$. Da questo segue che necessariamente esistono r colonne di N linearmente indipendenti: $N^{j_1}, ..., N^{j_r}$. Consideriamo allora il minore formato alle r righe e dalle r colonne di A linearmente indipendenti: $M = A^{j_1,...,j_r}_{i_1,...,i_r}$. Naturalmente $rnkM = r$, quindi M è invertibile! Ma allora M appartiene all'insieme di sopra, ed è uno dei minori di cui si fa il massimo. Da qui segue che $\rho \geq r$.

Abbiamo dunque trovato un metodo alternativo per determinare il rango di una matrice: si considerano tutti i suoi minori, se ne trova il rango e il rango più alto che troviamo è il rango della matrice A. Detto in altro modo: $rnkA = \iff \exists$ minore M di A invertibile e di ordine r e tutti i minori di A di ordine maggiore di r non sono invertibili, che equivale a dire che $\exists$ minore M di A di ordine r con $detM \neq 0$ e tutti i minori di A di ordine $r+1$ hanno determinante nullo (infatti per gli sviluppi di Laplace, se considero un minore di ordine $r+2$, quando sviluppo devo calcolare il determinante di $r+2$ matrici di ordine $r+1$, ma sapendo che tutti i determinanti delle sottomatrici quadrate di ordine $r+1$ sono nulli, ne segue che anche per i minori di ordine $r+2$il determinante è nullo. Per induzione si dimostra che vale per ogni $r+i$ con $i = 2, ..., n-r$).

13.8 Esercizio 7

Sia $A \in M(3, 4, \mathbb{R})$ definita da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

determinarne il rango con il metodo di sopra.

Soluzione: Valutiamo ogni minore di A, partendo da quelli di taglia 1×1 e arrivando a quelli di taglia 3×3. Notiamo che appena trovo un minore di taglia $h \times h$ invertibile, posso fermarmi e passare alla taglia successiva: so che la matrice ha almeno rango h.
La matrice ha sicuramente rango almeno1, in quanto posso scegliere una qualsiasi sottomatrice di taglia 1×1 (un numero) con determinante non nullo: per esempio posso prendere (1). Dunque $rnkA \geq 1$.
Cerchiamo ora un minore di taglia 2×2 invertibile: se prendiamo ad esempio il minore ottenuto dalle prime due righe e dalle prime due colonne, si ha la matrice 2×2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

che ha determinante

$$det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -1 - (-2) = 1 \neq 0$$

ed è dunque invertibile. Come prima possiamo affermare che $rnkA \geq 2$.
Dato che il rango può essere al massimo 3, trovo un minore di taglia 3×3 con determinante non nullo, allora $rnkA = 3$, altrimenti $rnkA = 2$. Analizziamo i minori di taglia 3×3: ce ne sono 4:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Se almeno una di queste 4 matrici ha determinante non nullo, allora $rnkA = 3$, se invece hanno tutte determinante nullo $rnkA = 2$.

$$det \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix} = 2(-1)^2 det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} - 3(-1)^4 det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = -16 - 12 = -28 \neq 0$$

Quindi la matrice ha rango 3.

Osservazione: notiamo che la seconda e la terza matrice contengono al loro interno la matrice di ordine 2 di cui avevamo trovato precedentemente il determinante: diciamo che una sottomatrice del genere, che si ottiene da un minore di partenza a cui aggiungiamo una riga e una colonna, è un minore orlato. Vogliamo così dimostrare il seguente

Teorema (di Kronecker o degli orlati): sia $A \in M(m,n,\mathbb{K})$, allora $rnkA = r \iff \exists$ un minore M di A di ordine r invertibile e tutti gli orlati di M hanno determinante nullo (che è praticamente la cosa detta sopra, ma con un numero inferiore di matrici di ordine $r+1$: non dobbiamo quindi controllarle tutte).

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare le due frecce separatamente:

($\Longrightarrow$) è ovvio per quanto visto nel "Metodo" di sopra: si hanno meno richieste.

($\Longleftarrow$) Per alleggerire la notazione, diciamo che il minore M di A di ordine r è un blocco in alto a sinistra, cosicché $M = A^{1,\dots,r}_{1,\dots,r}$ (se non lo fosse, possiamo con delle operazioni elementari far sì che compaia lì). Sicuramente le colonne di M sono indipendenti in quanto $rnkM = r$, e per quanto visto sopra anche le colonne di A dalla prima alla r-esima sono indipendenti. Vogliamo allora dimostrare che ogni altra colonna di A dipende da queste prime r, cioè che se $j > r$, allora $A^j \in Span(A^1, ..., A^r)$.
Sia allora N il minore di A formato dalle colonne $1, ..., r$ e dalla colonna j, ovvero $N = A^{1,\dots,r,j}$ (le righe sono quelle di A): ovviamente le prime r righe di N sono linearmente indipendenti. Sia ora $h > r$ e consideriamo la riga N_h: mostriamo che è combinazione lineare delle prime r. Consideriamo allora la matrice formata dalle prime r righe di A più la h-esima e dalle prime r colonne di A più la j-esima, ovvero $A^{1,\dots,r,j}_{1,\dots,r,h}$: questa matrice è un orlato di M e per ipotesi ha determinante nullo. Ma allora le sue righe sono linearmente dipendenti e visto che le prime righe sono linearmente indipendenti per ipotesi si deve avere che la riga h-esima sta nello *Span* delle prime r, ovvero $N_h \in Span(N_1, ..., N_r)$. Abbiamo allora dimostrato che $rnkN = r$. Possiamo allora fare lo stesso ragionamento per le colonne, arrivando ad affermare che $N^j \in Span(N^1, ..., N^r)$, che implica che $A^j \in Span(A^1, ..., A^r)$, ovvero che anche $rnkA = r$.

13.9 Esercizio 8

Sia $A \in M(3,4,\mathbb{R})$ definita da

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -\lambda+1 \\ 2 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 & 2\lambda+1 \end{pmatrix}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. Determinare $rnkA$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soluzione: Applichiamo il teorema di sopra. Notiamo subito che il rango di A non può superare 3.
Facilmente si vede che il minore di A costituito dalla prima e dalla seconda riga e dalle colonne prima e terza, ovvero la sottomatrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante non nullo! Quindi $rnkA \geq 2$ e per di più la prima e la terza colonna di A sono linearmente indipendenti (anche le prime due righe). Orliamo dunque questa sottomatrice: aggiungiamo la terza riga (unica scelta possibile) e o la seconda colonna o la quarta: abbiamo così da studiare due determinanti.

$$det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad det \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\lambda+1 \\ 2 & 1 & 1 \\ \lambda & 0 & 2\lambda+1 \end{pmatrix}$$

Per la prima matrice si ha che, sviluppando rispetto alla prima riga, il determinante è

$$det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3det \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = 3(-1) + 2 - \lambda^2 = -1 - \lambda^2$$

Per quanto riguarda la seconda invece si ha che, sviluppano rispetto alla terza riga, il determinante è

$$det \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\lambda+1 \\ 2 & 1 & 1 \\ \lambda & 0 & 2\lambda+1 \end{pmatrix} = \lambda det \begin{pmatrix} 1 & -\lambda+1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (2\lambda+1)det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$$

Notiamo che il primo minore, visto che λ varia in $\mathbb{R}$, non ha mai determinante nullo, perché il polinomio $p(\lambda) = -\lambda^2 - 1$ non ha radici in $\mathbb{R}$ e quindi $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ $rnkA = 3$.

13.10 Esercizio 9

Sia $A \in M(3, \mathbb{R})$ definita da

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -\lambda \\ \lambda & \lambda^2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. Determinare $rnkA$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soluzione: In questo caso, a differenza del precedente, non riusciamo a trovare un minore di ordine 2 con determinante sempre non nullo, infatti, tutti i minori di ordine 2 dipendono da λ. Notiamo tuttavia che i minori

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

hanno determinanti che si annullano rispettivamente per $\lambda = 1$ e per $\lambda = -2$: essendo numeri diversi, necessariamente $rnkA \geq 2$, infatti se $\lambda = -2$ esiste un minore di ordine 2 invertibile e se $\lambda = 1$ esiste un minore di ordine 2 invertibile (ovviamente se $\lambda \neq 1, -2$ allora $rnkA \geq 2$ in quanto entrambi i minori di sopra sono invertibili).
Per di più, dato che A è quadrata, l'unico orlato di un qualsiasi minore di ordine 2 è A stesso: calcolando il determinante di A, possiamo stabilire il suo rango al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$det \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -\lambda \\ \lambda & \lambda^2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda det \begin{pmatrix} 2 & -\lambda \\ \lambda^2 & 1-\lambda \end{pmatrix} - det \begin{pmatrix} 2 & -\lambda \\ \lambda & 1-\lambda \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda(2(1-\lambda) + \lambda^3) - (2(1-\lambda) + \lambda^2) + 2\lambda^2 - 2\lambda = \lambda^4 - \lambda^2 + 2\lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda^3 + \lambda^2 + 2)$$

dove il polinomio $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 2$ ha un solo zero reale (chiamiamolo α) in quanto la derivata $3\lambda^2 + 2\lambda$ si annulla per $\lambda = 0, -\frac{2}{3}$, dunque la funzione polinomiale ha un minimo locale per $\lambda = 0$, la cui immagine è $p(\lambda = 0) = 2 > 0$.

Dunque se $\lambda = 1$ o $\lambda = \alpha$, allora il determinante di sopra si annulla (in quanto il polinomio si annulla) e $rnkA = 2$, mentre se $\lambda \in \mathbb{R} - \{0, \alpha\}$, allora $rnkA = 3$.

14 Esercitazione 21-12-2021

14.1 Esercizio 1

Siano $W_1, ..., W_k$ dei sottospazi vettoriali. Dimostra che le seguenti definizioni sono equivalenti:

i) $W_1, ..., W_k$ sono in somma diretta

ii) $\forall i = 2, ..., k,\ W_i \cap (W_1 + ..., W_{i-1}) = \{0\}$

iii) $\forall i = 1, ..., k\ W_i \cap (W_1 + ... + \cancel{W_i} + ... + W_k) = \{0\}$

Dimostrazione. Dimostriamo che $i) \implies ii)$, $ii) \implies iii)$ e che $iii) \implies i)$

$i) \implies ii)$: Sia $w \in W_i \cap (W_1 + ..., W_{i-1})$. Per ipotesi $W_1, ..., W_k$ sono in somma diretta, quindi per la caratterizzazione vista a teoria, dati $w_i \in W_i$, con $i = 1, ..., k$, si ha che $w_1 + ... + w_k = 0$ se e solo se $w_1 = ... = w_k = 0$. Dato che $w \in (W_1 + ..., W_{i-1})$, esistono $w_1, ..., w_{i-1}$ tali che $w = w_1 + ... + w_{i-1}$; ma è vero anche che $w \in W_i$: possiamo riscrivere la somma come segue $w_1 + ... + w_{i-1} - w + 0 + ... + 0 = 0$ dove penso w come elemento di W_i, il primo 0 come elemento di W_{i+1}, fino all'ultimo 0 elemento di W_k. Ma allora per ipotesi $w_1 = ... = w_{i-1} = w = 0$ e in particolare $w = 0$, quindi $W_i \cap (W_1 + ..., W_{i-1}) = \{0\}$.

$ii) \implies iii)$: Dalla $ii)$ si ha che $W_k \cap (W_1 + ... + W_{k-1}) = \{0\}$, ma dato che possiamo permutare i sottospazi nella condizione $ii)$, si ha che vale per ogni $i = 1, ..., k$.

$iii) \implies i)$: Siano $w_i \in W_i$, con $i = 1, ..., k$, tali che $w_1 + ... + w_k = 0$. possiamo riscrivere la somma come: $w_i = -(w_1 + ... + \cancel{w_i} + ... + w_k)$. Notiamo che a sinistra abbiamo un elemento di W_i, mentre a destra un elemento di $W_1 + ... + \cancel{W_i} + ... + W_k$: allora $w_i \in W_i \cap (W_1 + ... + \cancel{W_i} + ... + W_k)$, che però per ipotesi contiene il solo 0: $w_i = 0$. Dato che la scelta di i è arbitraria, si ha che l'implicazione vale per ogni $i = 1, ..., k$.

14.2 Esercizio 2

Sia $V = S_2$ lo spazio delle matrici simmetriche di ordine 2 su $\mathbb{R}$. Definiamo l'endomorfismo $f : S_2 \longrightarrow S_2$ come

$$f\Big(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} a - b - c & -a + b - c \\ -a + b - c & a + b + 3c \end{pmatrix}$$

e sia

$$B = \Big\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big\} \subset S_2$$

una base di S_2 (con $a, b, c \in \mathbb{R}$). Si calcoli il polinomio caratteristico della matrice $M_B^B(f)$ associata a f nelle basi B di partenza e B di arrivo, si trovi $sp(f)$ e tutti gli oggetti relativi alla teoria spettrale (molteplicità, autospazi...).

Soluzione: Per prima cosa troviamo la matrice associata all'endomorfismo nelle basi B e B: troviamo le sue colonne con la procedura standard:

$$\Big[f\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Big)\Big]_B = \Big[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\Big]_B = [A_1 - A_2 + A_3]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Big[f\Big(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Big)\Big]_B = \Big[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\Big]_B = [-A_1 + A_2 + A_3]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Big[f\Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big)\Big]_B = \Big[\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\Big]_B = [-A_1 - A_2 + 3A_3]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e dunque la matrice associata a f nelle basi B e B è

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Per quanto visto a teoria il polinomio caratteristico di $M_B^B(f)$ ($p_{M_B^B(f)}$) è

$$p_{M_B^B(f)} = det(tI_3 - M_B^B(f)) = det \begin{pmatrix} t-1 & 1 & 1 \\ 1 & t-1 & 1 \\ -1 & -1 & t-3 \end{pmatrix}$$

Sommando la prima riga alla seconda otteniamo

$$det \begin{pmatrix} t-1 & 1 & 1 \\ 1 & t-1 & 1 \\ -1 & -1 & t-3 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} t-1 & 1 & 1 \\ t & t & 2 \\ -1 & -1 & t-3 \end{pmatrix}$$

e sottraendo alla seconda colonna la prima

$$det \begin{pmatrix} t-1 & 1 & 1 \\ t & t & 2 \\ -1 & -1 & t-3 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} t-1 & 2-t & 1 \\ t & 0 & 2 \\ -1 & 0 & t-3 \end{pmatrix} = -(2-t)det \begin{pmatrix} t & 2 \\ -1 & t-3 \end{pmatrix} =$$

$$= -(2-t)(t(t-3)+2) = (t-2)(t^2-3t+2) = (t-2)^2(t-1)$$

si ha così che $p_f = p_{M_B^B(f)} = (t-2)^2(t-1)$. Sappiamo dunque chi è lo spettro e chi sono le molteplicità algebriche degli autovalori:

$$sp(f) = \{t \in \mathbb{R} \,|\, (t-2)^2(t-1) = 0\} = \{1, 2\}$$

Per di più $ma(1,f) = 1$ e $ma(2,f) = 2$. Per questioni teoriche si ha anche che $mg(1,f) = dimV_1(f) = 1$ in quanto $mg(\lambda, f) \leq ma(\lambda, f)$ (dove λ è un autovalore), mentre $1 \leq mg(2,f) \leq 2$.
In particolare, chi è $V_1(f)$? $V_1(f) = Ker(id_V - f) \leftrightarrow Ker(M_B^B(id_V - f)) = Ker(I_3 - M_B^B(f))$: studiamo dunque questo nucleo:

$$Ker(I_3 - M_B^B(f)) = Ker\Big(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Big) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

che si traduce nel sistema lineare

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ -x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

Notiamo che l'ultima equazione è combinazione lineare delle prime due (e ha senso in quanto $dimV_1(f) = dimV_1(M_B^B(f)) = dimKer(I-3-M_B^B(f)) = 1$ per quanto visto sopra e dunque $rnkM_B^B(f) = 2$), quindi rimane

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

le cui equazioni sono $x = -z$ e $y = -z$, ovvero

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(I_3 - M_B^B(f)) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}$$

ovvero

$$Ker(I_3 - M_B^B(f)) = \left\{ z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} = Span(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Siamo dunque giunti alla conclusione che

$$V_1(f) = [Ker(I_3 - M_B^B(f))]_B^{-1} = Span(\left[\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_B^{-1}) = Span(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix})$$

e in effetti è vero che

$$f(\alpha \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}) = \alpha \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ovvero che la matrice $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore di f relativo all'autovalore 1.

Cerchiamo ora $V_2(f)$, ovvero l'autospazio relativo all'autovalore 2. Per quanto già visto $V_2(f) = Ker(2id_V - f) \longrightarrow Ker(M_B^B(2id_V - f)) = Ker(2I_3 - M_B^B(f)) = V_2(M_B^B(f))$. Studiamo dunque questo nucleo: dato che non conosciamo la molteplicità geometrica dell'autovalore 2, troviamo il rango della matrice $2I_3 - M_B^B(f)$, così da avere la dimensione dell'immagine e poi del nucleo grazie alla formula delle dimensioni di nucleo e immagine:

$$rnk(2I_3 - M_B^B(f)) = rnk \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Notiamo che le 3 colonne sono uguali (e non nulle), quindi $rnk(2I_3 - M_B^B(f)) = 1$, da cui segue che $dimKer(2I_3 - M_B^B(f)) = dimV_2(M_B^B(f)) = 3 - 1 = 2$ ($mg(2, f) = 2$). Definendo il nucleo:

$$Ker(2I_3 - M_B^B(f)) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

che si traduce nel sistema lineare

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases}$$

che si riduce banalmente a $x + y + z = 0$ e ricavando x: $x = -y - z$, ovvero

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(2I_3 - M_B^B(f)) \Longleftrightarrow x = -y - z$$

ovvero

$$Ker(2I_3 - M_B^B(f)) = \left\{ \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; y, z \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= Span(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = V_2(M_B^B(f))$$

Si giunge così alla conclusione che $V_2(f) = [Ker(2I_3 - M_B^B(f))]_B^{-1} = Span(\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_B^{-1}, \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_B^{-1}) =$ $= Span(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$ e in effetti è vero che

$$f(\alpha \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = 2\alpha \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\beta \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ovvero che le matrici $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sono due autovettori di f relativi all'autovalore 2.

Dato che $dimV = 3$, $dimV_1(f) = 1$ e $dimV_2(f) = 2$, si ha che $V = V_1(f) \oplus V_2(f)$ e tramite l'isomorfismo di passaggio alle coordinate: $\mathbb{R}^3 = V_1(M_B^B(f)) \oplus V_2(M_B^B(f))$. Sia ora B' una base di V adattata alla somma diretta, ovvero

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(notiamo che è una base di autovettori). Come determiniamo $M_{B'}^{B'}(f)$? Come sempre, troviamo le colonne:

$$\left[f(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}) \right]_{B'} = \left[\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[f(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) \right]_{B'} = \left[2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[f(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) \right]_{B'} = \left[2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$M_{B'}^{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che è una matrice diagonale (ovvero f è un endomorfismo diagonalizzabile).

14.3 Esercizio 3

Sia $f \in End(S_2)$ (su $\mathbb{R}$) definito da

$$f\Big(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \Big) = \begin{pmatrix} -a + 3b - 3c & b \\ b & 3a - 4b + 5c \end{pmatrix}$$

la cui matrice associata nelle basi B di partenza e B di arrivo (la stessa base B dell'Esercizio precedente) è

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Si calcoli il polinomio caratteristico della matrice $M_B^B(f)$ associata a f nelle basi B di partenza e B di arrivo, si trovi $sp(f)$ e le molteplicità degli autovalori.

Soluzione: Avendo già la matrice associata a f, possiamo trovare facilmente il suo polinomio minimo. Si ha che

$$p_f(t) = det(tI_3 - M_B^B(f)) = \begin{pmatrix} t+1 & -3 & 3 \\ 0 & t-1 & 0 \\ -3 & 4 & t-5 \end{pmatrix} = (t-1) det \begin{pmatrix} t+1 & 3 \\ -3 & t-5 \end{pmatrix} =$$

$$= (t-1)((t+1)(t-5)+9) = (t-1)(t^2 - 4t + 4) = (t-1)(t-2)^2$$

Notiamo subito che il polinomio caratteristico di f è completamente fattorizzabile, dunque f è triangolabile. Sappiamo così chi è $sp(f)$: dalla teoria $sp(f) = \{\lambda \in \mathbb{R} \,|\, p_f(\lambda) = 0\} = \{1, 2\}$. Inoltre $ma(1, f) = 1$, da cui segue che $mg(1, f) = 1$ (dato che $ma(\lambda, f) \geq mg(\lambda, f)$) e $ma(2, f) = 2$: vogliamo dunque trovare $mg(2, f)$ (sappiamo solo che $1 \leq mg(2, f) \leq 2$): cerchiamo $dimV_2(f) = dimKer(2id_V - f) = dimKer(M_B^B(2id_V - f)) = dimKer(2I_3 - M_B^B(f))$. Intanto troviamo esplicitamente la matrice $2I_3 - M_B^B(f)$:

$$2I_3 - M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

il nucleo di questa matrice è per definizione

$$Ker(2I_3 - M_B^B(f)) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

dove

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si traduce nel sistema lineare

$$\begin{cases} 3x - 3y + 3z = 0 \\ y = 0 \\ -3x + 4y - 3z = 0 \end{cases}$$

Anche in questo caso le tre equazioni sono linearmente dipendenti: la terza dipende dalla prima (tramite la seconda). In particolare le equazioni sono $x = -z$, $y = 0$. Quindi

$$Ker(2I_3 - M_B^B(f)) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \; x = -z, \quad y = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| z \in \mathbb{R} \right\} = Span(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

e dunque $mg(2, f) = dimV_2(f) = dimKer(2I_3 - M_B^B(f)) = 1$.

Osservazione: Notiamo che la matrice M di questo esercizio e la matrice dell'esercizio precedente NON sono simili, in quanto la molteplicità geometrica dell'autovalore 2 non è la stessa (per il resto avevano cose uguali: cui spettro, polinomio caratteristico, molteplicità algebriche): infatti sia le molteplicità che il polinomio caratteristico sono invarianti per la relazioni di coniugazione (e similitudine), anche se non sono completi, ovvero: endomorfismi coniugati hanno stesso polinomio caratteristico, spettro etc... ma non è vero il contrario. Tuttavia abbiamo visto che i due endomorfismi NON hanno le stesse molteplicità geometriche per tutti gli autovalori dello spettro e dunque non possono essere simili.

14.4 Esercizio 4

Sia $A_a \in M(3, \mathbb{R})$ definita da

$$\begin{pmatrix} a & a+1 & a^2+1 \\ 0 & a^2 & a^2-1 \\ 0 & 0 & 3a-2 \end{pmatrix}$$

dove a varia in $\mathbb{R}$. Studiare la diagonalizzabilità di A_a al variare del parametro.

Soluzione: Dato che la matrice è triangolare superiore è immediato trovare il suo polinomio, infatti gli autovalori sono gli elementi sulla diagonale e il polinomio caratteristico è $p_{A_a}(t) = (t-a)(t-a^2)(t+2-3a)$. Ricordiamo che una matrice è diagonalizzabile se e solo se il suo polinomio caratteristico è completamente fattorizzabile e le molteplicità geometriche degli autovalori sono uguali alle molteplicità algebriche degli stessi. Notiamo che il polinomio è completamente fattorizzabile (e questo è ovvio in quanto la matrice è triangolare). Dobbiamo allora ridurci a studiare le molteplicità degli autovalori.
Facciamo caso a una cosa: i tre autovalori, dipendendo da a, non sono necessariamente distinti! Dunque, per scrivere lo spettro di A_a non possiamo scrivere $sp(A_a) = \{a, a^2, 3a-2\}$ in quanto così vorremmo dire che i tre autovalori sono distinti. Per correttezza scriviamo $sp(A_a) = \{a\} \cup \{a^2\} \cup \{3a-2\}$. Per stabilire dunque spettro e molteplicità algebriche studiamo i casi in cui i tre autovalori sono uguali e quelli in cui sono distinti.

Partiamo studiando il caso più semplice, ovvero quello in cui $a \neq a^2 \neq 3a-2$: notiamo che $a \neq a^2 \neq 3a-2$ se e solo se $a \neq 0, 1, 2$ (infatti se $a = 0$, allora $a = a^2$, se $a = 1$, allora $a = a^2 = 3a-2$ e se $a = 2$, allora $3a-2 = a^2$). In questo caso le molteplicità algebriche degli autovalori sono uguali a 1 e dunque, dato che $ma(\lambda, A) \geq mg(\lambda, A)$, si ha che anche le molteplicità geometriche dei tre autovalori sono uguali a 1, ovvero la matrice A_a è diagonalizzabile.

$a = 1$: Se $a = 1$, allora per quanto già detto sopra, $a = a^2 = 3a - 2 = 1$ e dunque il polinomio caratteristico è $p_{A_1}(t) = (t-1)^3$. Si ha così che $ma(1, A_1) = 3$. Dobbiamo trovare allora $mg(1, A_1) = dimV_1(A_1) = dimKer(I_3 - A_1)$, per farlo troviamo il rango di $I_3 - A_1$, e poi con la formula di nucleo e immagine troviamo la dimensione del suo nucleo:

$$I_3 - A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dato che le ultime due righe sono composte di soli 0 e la prima è non nulla, si ha che $rnk(I_3 - A_1) = 1$ e dunque $mg(1, A_1) = dimV_1(A_1) = 3 - 1 = 2$. Dato che le molteplicità geometriche e algebriche dell'autovalore 1 (che è l'unico autovalore presente) non coincidono, la matrice A_1 non è diagonalizzabile.

$a = 2$: Se $a = 2$, allora per quanto già detto $a^2 = 3a - 2 = 4$ e dunque il polinomio caratteristico è $p_{A_2}(t) = (t-2)(t-4)^2$. Ovviamente $ma(2, A_2) = 1$ implica che $mg(2, A_2) = 1$, mentre $ma(4, A_2) = 2$. Ci resta dunque da verificare se $mg(4, A_2) = dimKer(4I_3 - A_2) = 1$ o 2. Come prima, troviamo il rango di $4I_3 - A_2$, e poi con la formula di nucleo e immagine troviamo la dimensione del suo nucleo:

$$4I_3 - A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dato che questa matrice è già a scalini e ha 2 pivot, si ha che $rnk(4I_3 - A_2) = 2$, che implica $dimKer(4I_3 - A_2) = mg(4, A_2) = 1$ e visto che $ma(4, A_2) = 2$ le due molteplicità non coincidono e la matrice A_2 non è diagonalizzabile.

$a = 0$: Se $a = 0$, allora per quanto già detto sopra, $a = a^2 = 0$ e dunque il polinomio caratteristico è $p_{A_0}(t) = (t+2)t^2$. Ovviamente $ma(-2, A_0) = 1$ implica che $mg(-2, A_0) = 1$, mentre $ma(0, A_0) = 2$. Ci resta dunque da verificare se $mg(0, A_0) = dimKer(A_0) = 1$ o 2. Come prima, troviamo il rango di A_0, e poi con la formula di nucleo e immagine troviamo la dimensione del suo nucleo:

$$A_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

si vede subito che $rnkA_0 = 2$, infatti ha una colonna nulla e le altre due non sono l'una multipla dell'altra. Dunque $dimKer(A_0) = dimV_0(A_0) = mg(0, A_0) = 3 - 2 = 1$: dato che $ma(0, A_0) \neq mg(0, A_0)$, A_0 non è diagonalizzabile.

14.5 Esercizio 5

Sia $f \in EndV$ diagonalizzabile. Dimostra che f^k è diagonalizzabile $\forall k \in \mathbb{N}$. Dimostra inoltre che se $f \in GL(V)$, allora anche f^{-1} è diagonalizzabile.

Dimostrazione. Per definizione di endomorfismo diagonalizzabile, sappiamo che esiste una base di V di autovettori per f: $B = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$ con $v_1, ..., v_n$ autovettori di f, ovvero $f(v_i) = \lambda_i v_i$ con $\lambda_i \in \mathbb{K}$ per $i = 1, ..., n$. La matrice associata a f in questa base è ovviamente diagonale e ha la forma

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Determiniamo $f^k(v_i)$: $f^k(v_i) = f^{k-1}(f(v_i)) = f^{k-1}(\lambda_i v_i) = \lambda_i f^{k-1}(v_i)$ e reiterando $f^k(v_i) = \lambda_i^k v_i$. Quindi v_i autovettore di $f \implies v_i$ autovettore di f^k e dunque B, che è una base di V di autovettori per f, è anche una base di V di autovettori per f^k e dunque f^k è diagonalizzabile in quanto esiste una base di V formata da autovettori di f^k e per di più $sp(f^k) = \{\lambda_1^k\} \cup ... \cup \{\lambda_n^k\}$. A livello matriciale si può invece notare che, dato che se si prende la stessa base in partenza e in arrivo abbiamo un isomorfismo di anelli da $End(V)$ in $M(n,\mathbb{K})$, si ha $M_B^B(f^k) = (M_B^B(f))^k$ e dato che $M_B^B(f)$ è diagonale, anche le sue potenze lo sono e in particolare

$$(M_B^B(f))^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

e quindi esiste una base B di V tale per cui $M_B^B(f^k)$ è diagonale.
Se invece $f \in GL(V)$, allora da $f(v_i) = \lambda_i v_i$, si ottiene subito che $f^{-1}(v_i) = \frac{v_i}{\lambda_i}$ (nota che affinché f sia invertibile è necessario che tutti i suoi autovalori siano diversi da 0) e dunque ogni v_i è un autovettore anche per f^{-1} e così $B \subset V$ è una base di V composta di autovettori per f^{-1} e dunque f^{-1} è diagonalizzabile; per di più $sp(f^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda_1}\} \cup ... \cup \{\frac{1}{\lambda_n}\}$.

14.6 Esercizio 6

Sia $A \in M(n,\mathbb{R})$ una matrice diagonalizzabile tale che $A^4 = I_n$. Dimostra che $A^2 = I_n$.

Dimostrazione. Per ipotesi, A è diagonalizzabile, quindi esiste una matrice $P \in GL(n,\mathbb{R})$ tale che $P \cdot A \cdot P^{-1} = D$ con D matrice diagonale (P è una matrice di cambio di base e dato che A è diagonalizzabile, posso renderla diagonale con una cambio di base). Valutiamo D^4: $D^4 = (P{\cdot}A{\cdot}P^{-1})^4 = P{\cdot}A{\cdot}P^{-1}{\cdot}P{\cdot}A{\cdot}P^{-1}{\cdot}P{\cdot}A{\cdot}P^{-1}{\cdot}P{\cdot}A{\cdot}P^{-1} = P{\cdot}A^4{\cdot}P^{-1} = P{\cdot}I_n{\cdot}P^{-1} = I_n$.
Dato che D è diagonale, avrà la forma seguente:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

e allora, per quanto detto nell'Esercizio precedente, D^4 è

$$D^4 = \begin{pmatrix} \lambda_1^4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ovvero $\forall i = 1,...,n$ si ha che $\lambda_i^4 = 1$. Ma la matrice è definita su $\mathbb{R}$ e i λ_i sono le radice quarte reali dell'unità, ovvero $\lambda_i = 1, -1$. Ma è vero allora che $\lambda_i^2 = 1\ \forall i = 1,...,n$ e quindi

$$D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

ma $D^2 = P \cdot A \cdot P^{-1} \cdot P \cdot A \cdot P^{-1} = P \cdot A^2 \cdot P^{-1}$, da cui ricaviamo che $A^2 = P^{-1} \cdot D^2 \cdot P = P^{-1} \cdot I_n \cdot P = I_n$.

14.7 Esercizio 7

Sia $f \in End(v)$ tale che $\forall v \in V - \{0\}$, v è u autovettore di f. Dimostra che $f \in Span(id_V)$.

Dimostrazione. Per ipotesi, se $B = \{v_1,...,c_n\}$ è una base di V (arbitraria), allora è una base di autovettori per f e dunque f è diagonalizzabile; in particolare

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

con $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Se riusciamo a dimostrare che $\lambda_1 = ... = \lambda_n = \alpha$ abbiamo finito in quanto $M_B^B(f)$ sarebbe un multiplo di I_n e dunque per questioni teoriche sarebbe la matrice associata a λid_V. Consideriamo allora il vettore $v = v_1 + v_i$: esso è diverso da 0 in quanto v_1 e v_i

sono linearmente indipendenti (stanno in B) ed è un vettore di V e quindi per ipotesi è un autovettore di f: $\exists \mu \in \mathbb{K}$ tale che $f(v) = \mu v = \mu(v_1 + v_i) = \mu v_1 + \mu v_i$. Ma f è un'applicazione lineare e sia v_1 che v_i sono autovettori, quindi $f(v) = f(v_1+v_i) = f(v_1)+f(v_i) = \lambda_1 v_1+\lambda_i v_i$, quindi $\mu v_1 + \mu v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_i v_i$, da cui segue necessariamente $\lambda_1 = \mu = \lambda_i$ per l'indipendenza lineare di v_1 e v_i (questo segue dal fatto che se v_1 e v_i sono linearmente indipendenti allora un vettore x nel loro $Span$ si scrive in modo unico come loro combinazione lineare). Reiterando il procedimento con tutti gli autovettori, otteniamo $\lambda_1 = ... = \lambda_n$ ($= \alpha$ per semplicità), ovvero

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

14.8 Esercizio 8

Nell'Esercizio 2 dell'esercitazione 07-12-2021 avevamo dimostrato che il centro di $M(n, \mathbb{K})$ è $Span(I_n)$: proponiamo una dimostrazione alternativa sfruttando la teoria spettrale.

Sia $A \in M(n, \mathbb{K})$ tale che $A \cdot B = B \cdot A$ $\forall B \in M(n, \mathbb{K})$. Per quanto visto a lezione, se due matrici quadrate commutano, allora gli autospazi dell'una sono invarianti per l'altra (ovvero $V_\lambda(A)$ è B-invariante e viceversa). Vogliamo dunque costruire una B opportuna e lavorare su questa. Dato che la proprietà vale per tutte le matrici $B \in M(n, \mathbb{K})$, possiamo prendere una B particolare. Fissiamo $v \in \mathbb{K}^n$ diverso dal vettore nullo e completiamo l'insieme $\{v\}$ a base di $\mathbb{K}^n$: $D = \{v, v_2, ..., v_n\}$ e definiamo la matrice B su questa base in modo che $Span(v)$ sia un autospazio di B (definire una matrice su una base equivale a definire l'endomorfismo associato a B sulla stessa base, che è unico). Ad esempio possiamo fare quanto segue: $v \mapsto v$ e $v_i \mapsto 0$ $\forall i = 2, ..., n$ (questo perché $B \cdot v = v$ implica che v è un autovettore di B e quindi $V_1(B) \supset Span(v)$; per evitare poi che ci sia la possibilità che l'autospazio non sia solo $span(v)$, mandiamo tutti gli altri, che sono non nulli, in 0: così gli altri sono autovettori, ma con un autovalore diverso). Da qui segue che $V_0(B) = KerB = Span(v_2, ..., v_n)$ e $dimV_0(B) = n-1$; mentre $V_1(B)$ non può essere più grande di $Span(v)$ in quanto $dimV = n$ e B ha già un autospazio di dimensione $n-1$ ($V_0(B)$), quindi un altro suo autospazio ha necessariamente dimensione 1 e quindi $V_1(B) = Span(v)$. Si ha anche che

$$M_D^D(L_B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = E_{11}$$

Questo autospazio è A-invariante: $A \cdot v = \lambda v$ con $\lambda \mathbb{K}$, ovvero tutti i vettori non nulli sono autovettori per A e quindi, per quanto visto nell'Esercizio precedente, $A = \lambda I_n$.

14.9 Esercizio 9

Sia $A \in M(4, \mathbb{R})$ definita da

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

determinare il polinomio caratteristico di A. Determinare inoltre se la matrice è triangolabile e in caso positivo trovare una base B che triangola A.

Soluzione: Per determinare il polinomio caratteristico di A dobbiamo trovare $det(tI_4 - A)$, che è

$$det(tI_4 - A) = det \begin{pmatrix} t+2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & t+2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & t-2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & t-2 \end{pmatrix} =$$

$$= 2(-1)^5 det\begin{pmatrix} t+2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & t-2 \end{pmatrix} + (t-2)(-1)^{3+3} det\begin{pmatrix} t+2 & 0 & 2 \\ -1 & t+2 & -1 \\ -2 & 0 & t-2 \end{pmatrix} =$$

$$= -2[(t+2)(5-2t) - t - 10] + (t-2)(t+2)[(t+2)(t-2)+4] = t^4$$

e dunque $p_A(t) = t^4$. Il polinomio è dunque completamente fattorizzabile in $\mathbb{R}$ (lo è in realtà su qualsiasi campo K, sia finito che non): per questioni teoriche A è triangolabile. Cerchiamo ora chi è esplicitamente $V_0(A) = KerA$:

$$KerA = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

che si traduce nel sistema lineare

$$\begin{cases} -2x + z - 2t = 0 \\ x - 2y + 2z + t = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ 2x - z + 2t = 0 \end{cases}$$

Notiamo che la quarta equazione e la prima sono equivalenti: una delle due è superflua, possiamo dunque toglierla dal sistema, riducendolo a

$$\begin{cases} x - 2y + 2z + t = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ 2x - z + 2t = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $z = y = 0$, $x = -t$, ovvero

$$KerA = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) = Span(v_1)$$

Dunque il vettore v_1 è un autovettore per A ed è "perfetto" per fare una base che triangola A. Sia dunque $B = \{v_1, e_1, e_2, e_3\}$ una base di $\mathbb{R}^4$ (fatta a caso) il cui primo vettore è v_1. Notiamo che la prima colonna della matrice $M_B^B(L_A)$ associata ad A in questa base è

$$[A \cdot v_1]_B = [0]_B = 0$$

ovvero è la colonna fatti di soli zeri. Sia allora $W_1 = Span(e_1, e_2, e_3)$, si ha che $\mathbb{R}^4 = Span(v_1) \oplus W_1$. Se troviamo esplicitamente la matrice associata nella base B si ottiene

$$M_B^B(L_A) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Per questioni teoriche, se chiamiamo $C = \{e_1, e_2, e_3\}$, si ha che la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

è $M_C^C(p_{W_1} \circ f_{|W_1})$, dove con $p_{W_1} \circ f_{|W_1}$ indichiamo l'endomorfismo da W_1 in sé stesso che prende un vettore $w \in W_1 = Span(e_1, e_2, e_3)$ e gli associa $w \mapsto (p_{W_1} \circ f_{|W_1})(w) = p_{W_1}(f_{|W_1}(w))$ e chiamando $u = (f_{|W_1}(w))$, con $u \in \mathbb{R}^4 = Span(v_1) \oplus W_1$ (e quindi esistono $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in W_1$ tali che $u = \lambda v_1 + x$), si ha che $p_{W_1}(f_{|W_1}(w)) = p_{W_1}(u) = p_{W_1}(\lambda v_1 + x) = x$, dove p_{W_1} è quindi la proiezione di u su W_1.
Vogliamo trovare il polinomio caratteristico di $M_C^C(p_{W_1} \circ f_{|W_1})$: sappiamo che $p_{M_B^B(L_A)}(t) = p_A(t) = t^4$ (per invarianza) e dato che $M_B^B(L_A)$ è a blocchi, il polinomio caratteristico lo possiamo pensare come al prodotto tra il polinomio caratteristico di $M_C^C(p_{W_1} \circ f_{|W_1})$

e quello di (0): dato che $p_{(0)}(t) = t$, si ha necessariamente che $p_{M_C^C(p_{W_1} \circ f_{|W_1})} = t^3$, che è completamente fattorizzabile e dunque $M_C^C(p_{W_1} \circ f_{|W_1})$ è triangolabile (se triangoliamo $M_C^C(p_{W_1} \circ f_{|W_1})$, triangoliamo anche A). Di nuovo, troviamo $Ker(M_C^C(p_{W_1} \circ f_{|W_1}))$ (d'ora in avanti chiameremo $M_C^C(p_{W_1} \circ f_{|W_1}) = T$):

$$KerT = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

che si traduce nel sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases}$$

che ha per soluzione $x = 0$, $y = z$, , ovvero

$$KerT = \left\{ y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} = Span(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = Span(v_2)$$

Dunque il vettore v_2 è un autovettore per T ed è "perfetto" per fare una base che triangola T. Ma a noi serve un vettore che triangola A, che deve appartenere a $\mathbb{R}^4$, mentre $v_2 \in \mathbb{R}^3$: ma v_2 rappresenta le coordinate in base C del vettore:

$$[v_2]_C^{-1} = 0e_1 + 1e_2 + 1e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ricordando che e_1, e_2, e_3 sono vettori di $\mathbb{R}^4$). Sia dunque $B' = \{v_1, [v_2]_C^{-1}, e_1, e_2\}$ una nuova base di $\mathbb{R}^4$: la matrice associata a L_A nella base B' è

$$M_{B'}^{B'}(L_A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sia allora $W_2 = Span(e_1, e_2)$, si ha che $\mathbb{R}^4 = Span(v_1, [v_2]_C^{-1}) \oplus W_2$. Per questioni teoriche, se chiamiamo $D = \{e_1, e_2\}$, si ha che la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è $M_D^D(p_{W_2} \circ f_{|W_2})$, dove con $p_{W_2} \circ f_{|W_2}$ indichiamo l'endomorfismo da W_2 in sé stesso che prende un vettore $w \in W_2 = Span(e_1, e_2)$ e gli associa $w \mapsto (p_{W_2} \circ f_{|W_2})(w) = p_{W_2}(f_{|W_2}(w))$ e chiamando $u = (f_{|W_2}(w))$, con $u \in \mathbb{R}^4 = Span(v_1, [v_2]_C^{-1}) \oplus W_2$ (e quindi esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $x \in W_2$ tali che $u = \lambda v_1 + \mu v_2 + x$), si ha che $p_{W_2}(f_{|W_2}(w)) = p_{W_2}(u) = p_{W_2}(\lambda v_1 + \mu v_2 + x) = x$, dove p_{W_2} è quindi la proiezione di u su W_2.
Vogliamo trovare il polinomio caratteristico di $M_D^D(p_{W_2} \circ f_{|W_2})$: sappiamo che $p_{M_D^D(L_A)}(t) = p_A(t) = t^4$ (per invarianza) e dato che $M_D^D(L_A)$ è a blocchi, il polinomio caratteristico lo possiamo pensare come al prodotto tra il polinomio caratteristico di $M_D^D(p_{W_2} \circ f_{|W_2})$ e quello della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = S$$

Dato che $p_S(t) = t^2$, si ha necessariamente che $p_{M_D^D(p_{W_2} \circ f_{|W_2})} = t^2$, che è completamente fattorizzabile e dunque $M_D^D(p_{W_2} \circ f_{|W_2})$ è triangolabile (se triangoliamo $M_D^D(p_{W_2} \circ f_{|W_2})$, triangoliamo anche A). Di nuovo, troviamo $Ker(M_D^D(p_{W_2} \circ f_{|W_2}))$ (d'ora in avanti chiameremo $M_D^D(p_{W_2} \circ f_{|W_2}) = L$)

$$KerL = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

che si traduce nell'equazione $x = 0$, ovvero

$$KerL = \left\{ y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} = Span(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = Span(v_3)$$

Dunque il vettore v_3 è un autovettore per L ed è "perfetto" per fare una base che triangola L. Ma a noi serve un vettore che triangola A, che deve appartenere a $\mathbb{R}^4$, mentre $v_3 \in \mathbb{R}^2$: ma v_3 rappresenta le coordinate in base D del vettore:

$$[v_3]_D^{-1} = 0e_1 + 1e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ricordando che e_1, e_2 sono vettori di $\mathbb{R}^4$). Sia ora $B'' = \{v_1, [v_2]_C^{-1}, [v_3]_D^{-1}, e_1\}$ una nuova base per $\mathbb{R}^4$, la matrice A nelle basi B'' di partenza e arrivo è

$$M_{B''}^{B''}(L_A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che è una matrice triangolare superiore: siamo così giunti alla conclusione che

$$B'' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^4$ che triangola A.

Osservazione: La scelta del quarto vettore della base è casuale (con la restrizione di non appartenenza a $Span(v_1, [v_2]_C^{-1}, [v_3]_D^{-1})$): infatti qualsiasi vettore si scelga, la matrice è triangolare.

15 Esercitazione 07-03-2022

15.1 Esercizio 1

Sia $A \in M(3, \mathbb{R})$ una matrice definita da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

si calcoli il polinomio minimo di A; si trovino in seguito gli autovalori di A e se ne discuta la diagonalizzabilità.

Soluzione: Proponiamo in quest'Esercizio un metodo di calcolo del polinomio minimo di un endomorfismo/matrice quadrata: il metodo delle potenze. Dato che per il teorema di Hamilton-Cayley il polinomio minimo di un endomorfismo divide il polinomio caratteristico dello stesso, nel nostro caso il polinomio minimo non potrà avere grado superiore a 3. Notiamo quindi che se calcoliamo le potenze di A fino al cubo, otterremo sicuramente una relazione di dipendenza lineare tra I_3, A, A^2, A^3, in quanto, tale relazione nient'altri è se non l'immagine della valutazione su A del polinomio caratteristico. Come possiamo dunque calcolare il polinomio minimo? Basta calcolare le potenze di A fino al massimo alla terza, e, volta per volta, verificare se la potenza di grado massimo calcolata sta o meno nello *Span* delle precedenti. Procediamo dunque come segue:

$$A^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notiamo che $A \notin Span(I_3)$ e dunque il polinomio minimo non è della forma $\mu_A(t) = t - \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$): possiamo andare avanti con il calcolo delle potenze:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo di capire se A^2 è o meno combinazione lineare di A e I_3: siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e sia $\alpha I_3 + \beta A$ una combinazione lineare di elementi di $\{I_3, A\}$: vogliamo verificare se questa combinazione genera o meno A^2: scritta con i coefficienti la combinazione lineare diventa:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & 2\beta & 0 \\ -\beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Notiamo subito che una qualsiasi combinazione lineare di I_3 e A ha uno zero nella posizione $3, 1$, mentre A^2 in quella posizione ha un -1. Dunque $A^2 \notin Span(I_3, A)$ e dunque il polinomio minimo di A non è della forma $\mu_A(t) = t^2 + \lambda_1 t + \lambda_2$ (con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$). Procediamo allora con la terza potenza di A:

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Controlliamo dunque che ci sia una relazione di dipendenza lineare tra I_3, A, A^2, A^3 (è sicuro che ci sia!): siano $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e sia $\alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2$ una combinazione lineare di elementi di $\{I_3, A, A^2\}$: vogliamo verificare che questa combinazione genera A^3: scritta con i coefficienti la combinazione lineare diventa:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta - \gamma & 2\beta + 2\gamma & 2\gamma \\ -\beta - \gamma & \alpha - \gamma & \beta \\ -\gamma & \beta & \alpha + \gamma \end{pmatrix}$$

Cerchiamo allora la soluzione dell'uguaglianza matriciale

$$\begin{pmatrix} \alpha + \beta - \gamma & 2\beta + 2\gamma & 2\gamma \\ -\beta - \gamma & \alpha - \gamma & \beta \\ -\gamma & \beta & \alpha + \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

che si traduce in

$$\begin{cases} \alpha+\beta-\gamma=-3 \\ 2\beta+2\gamma=0 \\ 2\gamma=2 \\ -\beta-\gamma=0 \\ \alpha-\gamma=-2 \\ \beta=-1 \\ -\gamma=-1 \\ \beta=-1 \\ \alpha+\gamma=0 \end{cases}$$

Notiamo che la soluzione $\alpha=-1$, $\beta=-1$ e $\gamma=1$ soddisfa tutte le 9 equazioni e quindi la relazione di dipendenza lineare tra le 4 matrici è

$$A^3=-I_3-A+A^2 \Longrightarrow A^3-A^2+A+I_3=0$$

Ma allora il polinomio

$$q(t)=t^3-t^2+t+1$$

è il polinomio di grado minimo che, quando valutato in A, dà l'endomorfismo nullo, ovvero è il polinomio minimo di A:

$$\mu_A(t)=t^3-t^2+t+1$$

Questa è una procedura standard per calcolare il polinomio minimo di una matrice quadrata. Notiamo inoltre che essendo il polinomio minimo di grado 3 e dividendo esso il polinomio caratteristico (che ha anch'esso grado 3), dato che sono entrambi monici, per questioni teoriche essi sono uguali: proviamolo empiricamente

$$p_A(t)=det(tI_3-A)=det\begin{pmatrix} t-1 & -2 & 0 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -1 & t \end{pmatrix}=det\begin{pmatrix} t-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}+tdet\begin{pmatrix} t-1 & -2 \\ 1 & t \end{pmatrix}=$$

$$=-(t-1)+t[t(t-1)+2]=t^3-t^2+t+1$$

Questo ci dice anche che L_A è un endomorfismo ciclico.
Per quanto riguarda gli autovalori di A, dobbiamo trovare le radici del polinomio caratteristico di A. Notiamo in primo luogo che la derivata di $p_A(t)$ è $p'_A(t)=3t^2-2t+1$ che è un polinomio la cui immagine è sempre positiva, in quanto non ha radici reali: ma allora $p'_A(t)>0$ $\forall t\in\mathbb{R}$ e dunque $p_A(t)$ è crescente su tutto il suo dominio: da qui segue che $p_A(t)$ possiede una sola radice reale e dunque A non è diagonalizzabile, in quanto il suo polinomio caratteristico non è completamente fattorizzabile. Troviamo la sua unica radice, ovvero l'unico autovalore reale di A: per la formula di Cardano si ha che

$$t=\frac{1}{3}+\sqrt[3]{-\frac{17}{27}+\sqrt{\frac{289}{729}+\frac{8}{729}}}+\sqrt[3]{-\frac{17}{27}-\sqrt{\frac{289}{729}+\frac{8}{729}}}=\frac{1}{3}+\sqrt[3]{-\frac{17}{27}+\sqrt{\frac{11}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{17}{27}-\sqrt{\frac{11}{27}}}$$

è l'unica radice reale di $p_A(t)$ e dunque l'unico autovalore di A.

15.2 Esercizio 2

Sia $A\in M(5,\mathbb{R})$ definita da

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si calcoli il polinomio minimo di A sapendo che $p(t)=t^5-3t^4+5t^3-5t^2+4t-2\in I(A)$.

Soluzione: Proponiamo qui un altro metodo per il calcolo del polinomio minimo di una matrice, che passa attraverso il fatto visto a lezione che il polinomio minimo divide ogni polinomio di $I(A)$ (e in particolare i fattori irriducibili di A stanno nei fattori irriducibili di ogni polinomio dell'ideale). Scomponiamo dunque il polinomio $p(t) = t^5 - 3t^4 + 5t^3 - 5t^2 + 4t - 2$:

$$p(t) = t^5 - 3t^4 + 5t^3 - 5t^2 + 4t - 2 = (t-1)(t^2+1)(t^2-2t+2)$$

Dato che $p(t) \in I(A)$, sappiamo che $\mu_A(t)|p(t)$, ovvero che i possibili valori di $\mu_A(t)$ sono:

· $\mu_A(t) = t - 1$

· $\mu_A(t) = t^2 + 1$

· $\mu_A(t) = t^2 - 2t + 2$

· $\mu_A(t) = (t-1)(t^2-2t+2)$

· $\mu_A(t) = (t-1)(t^2+1)$

· $\mu_A(t) = (t^2+1)(t^2-2t+2)$

· $\mu_A(t) = (t-1)(t^2+1)(t^2-2t+2)$

Analizziamo caso per caso:

· $\mu_A(t) = t - 1$: se il polinomio minimo fosse $\mu_A(t) = t - 1$, allora si avrebbe che $\mu_A(A) = A - I_5 = 0$, tuttavia ciò non è vero in quanto $A \neq I_5$ e dunque $\mu_A(t) \neq t - 1$.

· $\mu_A(t) = t^2 + 1$: Calcoliamo esplicitamente A^2 e verifichiamo se $A^2 + I_5 = 0$:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notiamo subito che $A^2 + I_5 \neq 0$ e dunque $\mu_A(t) \neq t^2 + 1$.

· $\mu_A(t) = t^2 - 2t + 2$: Verifichiamo se $A^2 - 2A + 2I_5 = 0$:

$$A^2 - 2A + 2I_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi $\mu_A(t) \neq t^2 - 2t + 2$.

· $\mu_A(t) = (t-1)(t^2+1)$: verifichiamo se $(A - I_5)(A^2 + I_5) = 0$ (N.B. $M(n, \mathbb{K})$ non è un dominio, quindi, anche se abbiamo verificato che $A - I_5 \neq 0$ e che $A^2 + I_5 \neq 0$, non possiamo affermare che il loro prodotto sia non nullo a causa della presenza dei divisori di 0):

$$(A - I_5)(A^2 + I_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi $\mu_A(t) \neq (t-1)(t^2+1)$.

· $\mu_A(t) = (t-1)(t^2-2t+2)$: dobbiamo verificare se $(A-I_5)(A^2+-2A+2I_5) = 0$:

$$(A-I_5)(A^2+-2A+2I_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dunque $\mu_A(t) = (t-1)(t^2-2t+2)$ è il polinomio minimo di A.

15.3 Esercizio 3

Sia $A \in M(3,\mathbb{R})$ una matrice definita da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

determinare $\mu_A(t)$ utilizzando i polinomi minimi relativi di un insieme di generatori.

Soluzione: Per calcolare il polinomio minimo di un endomorfismo tramite i polinomi minimi relativi, scegliamo (arbitrariamente) una base di $\mathbb{R}^3$: per semplicità consideriamo $Can_{\mathbb{R}^3} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Cerchiamo dunque i polinomi minimi relativi dei 3 generatori:

· e_1: Cerchiamo le immagini tramite le potenze di A di e_1:

$$L_A(e_1) = A \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = e_1 - e_3$$

Notiamo che e_1 e $L_A(e_1)$ sono linearmente indipendenti e quindi dobbiamo andare avanti

$$L_A^2(e_1) = A^2 \cdot e_1 = A \cdot (A \cdot e_1) = A \cdot (e_1 - e_3) = A \cdot e_1 - A \cdot e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -2e_3$$

Ci chiediamo ora se questi risultati sono tra di loro linearmente indipendenti oppure no: chiediamoci se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali per cui

$$\alpha e_1 + \beta L_A(e_1) = L_A^2(e_1)$$

che equivale a risolvere

$$\alpha e_1 + \beta(e_1 - e_3) = (\alpha + \beta)e_1 - \beta e_3 = -2e_3$$

che effettivamente ha soluzione $\beta = 2$ $\alpha = -2$, ovvero

$$-2e_1 + 2L_A(e_1) = L_A^2(e_1) \Longrightarrow L_A^2(e_1) - 2L_A(e_1) + 2e_1$$

Ma allora il polinomio

$$\mu_{A,e_1}(t) = t^2 - 2t + 2$$

è il polinomio minimo di A relativo a e_1, in quanto $\mu_{A,e_1}(A)(e_1) = 0$.

· e_2: Cerchiamo le immagini tramite le potenze di A di e_2:

$$L_A(e_2) = A \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_2$$

Notiamo che $L_A(e_2)$ e e_2 non sono linearmente indipendenti, in quanto

$$\frac{1}{2}L_A(e_2) = e_2$$

Ma allora il polinomio $p(t) = t - 2$ si annulla quando viene valutato in A e poi in e_2, ovvero $p(A)(e_2) = 0$ e quindi è il polinomio minimo di A relativo a e_2, ovvero

$$\mu_{A,e_2} = t - 2$$

Adesso non c'è bisogno di trovare il polinomio minimo di A relativo a e_3, in quanto il polinomio minimo di A è l'mcm tra i polinomi minimi di A relativi a e_1, e_2 e e_3, ma ha grado al massimo 3. Dato che μ_{A,e_2} e μ_{A,e_1} sono coprimi e il loro mcm ha grado 3, si ha che

$$mcm(\mu_{A,e_1}(t), \mu_{A,e_2}(t)) = \mu_A(t) = (t-2)(t^2 - 2t + 2)$$

(Se avessimo cercato μ_{A,e_3} avremmo ovviamente trovato lo stesso risultato, ma ci siamo risparmiati un passaggio!)

15.4 Esercizio 4

Sia V un $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale con $dimV = 3$. Si costruisca, o si dimostri che non esiste, una $f \in \mathcal{T}(V)$ tale che valgano tutte le seguenti:

i) $f \notin \mathcal{D}(V)$.

ii) $dimKer(f - 2id_V)^2 = 2$.

iii) $\exists W \subset V$ f-invariante, con $dimW = 2$ e $W \neq Ker(f - 2id_V)^2$.

iv) Esiste un autovettore $v \in V - W$.

Soluzione: Notiamo subito che dal punto *ii)* $ma(2, f) \neq 0$: infatti, se $ma(2, f) = 0$, allora si avrebbe che $mg(2, f) = 0$ ovvero che $dimKer(f - 2id_V) = 0 \implies f - 2id_V$ sarebbe iniettiva, ma dato che la composizione di applicazioni iniettive è iniettiva a sua volta, si avrebbe $(f - 2id_V)^2$ iniettiva, ovvero che $dimKer(f - 2id_V)^2 = 0$, in contraddizione a quanto detto nell'ipotesi. Quindi, dato che $dimV = 3$, i possibili valori di $ma(2, f)$ sono: $ma(2, f) \in \{1, 2, 3\}$.
Per il punto *iii)* esiste un sottospazio W f-invariante di dimensione 2: intersechiamo W con $Ker(f - 2id_V)^2$ (che si ricorda essere f-invariante in quanto $f - 2id_V$ commuta con f): dato che $W \neq Ker(f - 2id_V)^2$ per ipotesi, per quanto visto nell'Esercizio 6 dell'esercitazione del 12/11/2021 si deve avere che $dim(W \cap Ker(f - 2id_V)^2) = 1$ e quindi $\exists v' \in V$ tale per cui $W \cap Ker(f - 2id_V)^2 = Span(v')$: per di più, dato che $Span(v')$ è un'intersezione di spazi f-invarianti, esso è f-invariante e quindi $f(Span(v')) \subset Span(v') \implies f(v') \in Span(v') \implies f(v') = \lambda v'$ per un qualche $\lambda \in \mathbb{Q}$, ovvero v' è un autovettore per f. Ma quanto vale λ? Dato che $(f - 2id_V)^2(v') = 0$ (in quanto $v' \in W \cap Ker(f - 2id_V)^2$ e quindi a maggior ragione $v' \in Ker(f - 2id_V)^2$) si ha che

$$(f - 2id_V)^2(v') = (f - 2id_V)((f - 2id_V)(v')) = (f - 2id_V)((\lambda - 2)v') = (\lambda - 2)^2 v' = 0$$

e poiché $\mathbb{Q}$ è un campo e $v' \neq 0$, per annullamento del prodotto si deve avere che $\lambda - 2 = 0$ ovvero $\lambda = 2$, e quindi in particolare v' è un autovettore relativo all'autovalore 2.
L'idea adesso è quella di completare $\{v'\}$ a base di W (basta aggiungere un vettore $w \notin Span(v')$): si ha che $\{v', w\}$ è una base di W. Ma per il punto *iv)* esiste un autovettore $v \in V - W$ e dunque l'insieme $B = \{v', w, v\}$ genera V in quanto v' e w sono linearmente indipendenti (in quanto base di W) e $v \notin W = Span(v', w)$ e, per questioni dimensionali, è una base di V. Rispetto a questa base, la matrice associata a f è necessariamente

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Infatti, W è f-invariante e dunque la sua immagine è rappresentata completamente dal quadrato 2×2 in alto a sinistra (si pensi alla restrizione $f_{|_W} : W \longrightarrow W$) e, poiché v è un autovettore si ha che $f(v) = \gamma v$ per qualche $\gamma \in \mathbb{Q}$. Possiamo allora calcolare il polinomio caratteristico di f: essendo $M_B^B(f)$ triangolare superiore si ha che

$$p_f(t) = (t-2)(t-\beta)(t-\gamma)$$

Ma per il punto $i)$ $f \notin \mathcal{D}(V)$ quindi $2, \beta, \gamma$ NON possono essere tutti distinti. Assumiamo dunque che almeno due tra $\beta, \gamma, 2$ siano uguali:

$\cdot$ $\beta = \gamma = 2 \Longrightarrow$ in questo caso $ma(2, f) = 3$ e la matrice che rappresenta f nella base B sarebbe

$$M_B^B(f) = A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vediamo se le altre condizioni sono rispettate:

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ovvero $dimKer(A - 2I_3)^2 = 3$ in contraddizione al punto $ii)$. Quindi non possono essere tutti uguali.

$\cdot$ $\beta = \gamma \neq 2 \Longrightarrow$ La matrice associata a f nella base B è ora del tipo

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

In questo caso ovviamente $dimV_2 = mg(2, f) = 1$ in quanto nel polinomio caratteristico la molteplicità algebrica di 2 è 1. Vediamo se le altre condizioni sono rispettate:

$$A - \beta I_3 = \begin{pmatrix} 2-\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ma questa matrice ha rango 1 e quindi $dimKer(A - \beta I_3) = dimV_\beta = 3 - 1 = 2$, e dunque $mg(\beta, f) = 2$, ma dal polinomio caratteristico si ha anche $ma(\beta, f) = 2$ e dunque, dato che ogni autovalore di f ha molteplicità algebriche e geometriche uguali, si ha che f è diagonalizzabile, in contrapposizione col punto $i)$.

$\cdot$ $\gamma = 2$ e $\beta \neq \gamma \Longrightarrow$ Il polinomio caratteristico in questa forma è $p_f(t) = (t-2)^2(t-\beta)$ e dunque $ma(2, f) = 2 = mg(2, f)$ (per il punto $ii)$) e $ma(\beta, f) = 1$ da cui anche $mg(\beta, f) = 1$, ma allora, dato che ogni autovalore di f ha molteplicità algebriche e geometriche uguali, si ha che f è diagonalizzabile, in contrapposizione col punto $i)$.

$\cdot$ $\beta = 2$ e $\beta \neq \gamma \Longrightarrow$ In questo caso la matrice $M_B^B(f)$ è fatta come segue

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

e necessariamente si deve avere che $\alpha \neq 0$, altrimenti $M_B^B(f)$ sarebbe diagonale. Tuttavia anche quest'ultimo caso non è possibile, in quanto si avrebbe che la matrice $(M_B^B(f) - 2I_3)^2$ sarebbe della forma

$$M_B^B(f) - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma - 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow (M_B^B(f) - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma - 2 \end{pmatrix}$$

e quindi si avrebbe che $Ker(f - 2id_V)^2$ sarebbe dato dalle prime due colonne di $(M_B^B(f) - 2I_3)^2$, ma poiché le prime due colonne sono proprio W in quanto W è f-invariante (si è visto a teoria che essendo W f-invariante, esso è anche $(f - 2id_V)^2$-invariante e quindi $(M_B^B(f) - 2I_3)^2(W) \subset W$, e avendo entrambi dimensione 2, segue l'uguaglianza), ne seguirebbe $W = Ker(f - 2id_V)^2$, in contraddizione col punto $iii)$.

16 Esercitazione 11-03-2022

16.1 Esercizio 1

Si dimostri che $\forall P \in \mathbb{K}[t]$ monico, $\exists\, f : V \longrightarrow V$ lineare tale che $p_f = \mu_f = P$, ovvero che dato un polinomio monico qualsiasi, esiste un endomorfismo ciclico il cui polinomio minimo è P.

Dimostrazione. Premessa teorica: Fissiamo $V = \mathbb{K}^n$ (possiamo a meno di isomorfismo) e fissiamo un endomorfismo ciclico $f \in End(\mathbb{K}^n)$, vogliamo dimostrare che ogni polinomio di $\mathbb{K}[t]$ è realizzabile come polinomio minimo di f. Per ipotesi f è ciclico, e dunque esiste una base ciclica di $\mathbb{K}^n$, che chiamiamo $B = \{v, f(v), ..., f^{n-1}(v)\}$. Notiamo che $f^n(v)$ dipende da tutti i vettori di B e quindi esistono $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{K}$ non tutti nulli tali che $f^n(v) + a_0 v + a_1 f(v) + ... + a_{n-1} f^{n-1}(v) = 0$, che implica $f^n(v) = -a_0 v - a_1 f(v) - ... - a_{n-1} f^{n-1}(v)$: per motivi teorici polinomio $\mu_f(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_{n-1} t^{n-1} + t^n$ è proprio il polinomio minimo di f. Determiniamo la matrice compagna di f nella base B: essa avrà la forma

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Arriviamo così alla dimostrazione.
Fissato $P \in \mathbb{K}[t]$, di grado n (diciamo $P(t) = b_0 + b_1 t + ... + t^n$), possiamo associare a P la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -b_{n-1} \end{pmatrix}$$

che, per quanto visto sopra è la matrice compagna indotta dall'applicazione lineare $M_P : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ (associata a quella matrice per una certa base B). Per ragioni teoriche P è il polinomio minimo di M_P e inoltre si ottiene che $p_{M_P} = det(tI_n - A)$, sviluppando rispetto alla prima riga e per induzione (visto a teoria), è proprio

$$det(tI_{n+1} - A) = \begin{pmatrix} t & 0 & \dots & 0 & b_0 \\ -1 & t & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & -1 & \ddots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & t + b_{n-1} \end{pmatrix} = b_0 + b_1 t + ... + b_n t^n$$

e dunque $p_{M_P} = \mu_{M_P}$, ovvero M_P è un endomorfismo ciclico.

16.2 Esercizio 2

Sia $A \in M(4, \mathbb{R})$ definita da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinare il polinomio minimo di A.

Soluzione: Notiamo subito che la matrice A è a blocchi con degli zeri nei blocchi in alto a destra e in basso a sinistra e dunque i due spazi $Span(e_1, e_2)$ e $Span(e_3, e_4)$ sono A-invarianti (e ovviamente in somma diretta in $\mathbb{R}^4$ e quindi sono supplementari): infatti, se

$\alpha e_1 + \beta e_2$ è una combinazione lineare di elementi di e_1, e_2, si ha che

$$A \cdot (\alpha e_1 + \beta e_2) = \alpha A \cdot e_1 + \beta A \cdot e_2 = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in Span(e_1, e_2)$$

(ricordando che $A \cdot e_j$ è la j-esima colonna di A) ovvero $Span(e_1, e_2)$ è A-invariante; allo stesso modo si dimostra che $Span(e_3, e_4)$ è A-invariante. Per quanto visto a teoria se due sottospazi f-invarianti sono in somma diretta e generano tutto lo spazio, allora il polinomio minimo di un certo endomorfismo f nello spazio è il minimo comune multiplo dei polinomi minimi delle restrizioni ai due sottospazi f-invarianti. Chiamando

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ci basta determinare μ_{A_1} e μ_{A_2}, che sono i polinomi minimi delle restrizioni della matrice A rispetto ai due sottospazi A-invarianti di sopra. Notare che A_1 è la matrice che rappresenta A ristretta a $Span(e_1, e_2)$ (essendo lo spazio A-invariante, A_1 è un endomorfismo) e A_2 è la matrice che rappresenta A ristretta a $Span(e_3, e_4)$.
Cominciamo con μ_{A_1}: usiamo il metodo delle potenze per trovare il polinomio minimo

$$A_1^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Notiamo che possiamo fermarci, in quanto il polinomio minimo di un endomorfismo ha grado minore o uguale alla dimensione dello spazio (che in questo caso è 2) in quanto divide il polinomio caratteristico che ha grado pari alla dimensione dello spazio: quindi sicuramente non dobbiamo calcolare le potenze oltre il quadrato: la relazione di dipendenza lineare tra le 3 matrici è

$$2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A_1^2 - A_1 - A_1^0 = 0$$

Ma allora il polinomio minimo di A_1 è proprio

$$\mu_{A_1}(t) = t^2 - t - 2$$

(N.B. In teoria poteva accadere di doversi fermare anche alla potenza di esponente 1, ma è naturale che A_1 e I_2 sono linearmente indipendenti).

Troviamo ora il polinomio minimo di A_2 usando ancora il metodo delle potenze:

$$A_2^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Per lo stesso motivo di prima possiamo fermarci in quanto abbiamo raggiunto il grado massimo possibile (e ancora una volta A_2 e I_2 non sono l'una multipla dell'altra). La relazione di dipendenza lineare è data da

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A_2^2 - 2A_2 - A_2^0 = 0$$

e dunque ne segue che

$$\mu_{A_2}(t) = t^2 - 2t - 1$$

Cerchiamo ora il minimo comune multiplo dei polinomi $\mu_{A_1}(t)$ e $\mu_{A_2}(t)$: scomponiamo i polinomi e otteniamo

$$\mu_{A_2}(t) = t^2 - 2t - 1 = (t - 1 - \sqrt{2})(t - 1 + \sqrt{2})$$

$$\mu_{A_1}(t) = t^2 - t - 2 = (t - 2)(t + 1)$$

dato che i polinomi non hanno fattori in comune si ha che

$$\mu_A(t) = mcm(\mu_{A_1}(t), \mu_{A_2}(t)) = (t - 1 - \sqrt{2})(t - 1 + \sqrt{2})(t - 2)(t + 1)$$

Osservazione: Il metodo qui presentato è utile in quanto nel calcolo delle potenze abbiamo a che fare solo con matrici 2×2 e non 4×4.

16.3 Esercizio 3

Sia $A \in M(5,\mathbb{R})$ definita da

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Studiare la diagonalizzabilità di A.

Vogliamo verificare se $V = \mathbb{R}^5$ può essere spezzato in somma diretta di autospazi di A. Calcoliamo in primo luogo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(t) = det(tI_5 - A) = det \begin{pmatrix} t-2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & t-2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & t-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & t-1 \end{pmatrix} = (t-2) det \begin{pmatrix} t-2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & t-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & t-1 \end{pmatrix} =$$

$$= (t-2)(t-2) det \begin{pmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 0 & -1 & t-1 \end{pmatrix} = (t-2)^2(t-1)^3$$

Dato che il polinomio caratteristico è completamente fattorizzabile, A è almeno triangolabile. Per quanto visto a teoria, dato che $p_1(t) = (t-2)^2$ e $p_2(t) = (t-1)^3$ sono coprimi, si ha che vale la decomposizione primaria canonica

$$\mathbb{R}^5 = Ker(A - 2I_5)^2 \oplus Ker(A - I_5)^3$$

Cerchiamo dunque di capire chi sono quegli autospazi generalizzati: innanzitutto troviamo esplicitamente $A - 2I_5$ e $(A - 2I_5)^2$:

$$A - 2I_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A - 2I_5)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

si vede subito che $rnk((A - 2I_5)^2) = 3$, infatti la seconda colonna è nulla e la prima e la quinta sono uguali. Dunque, per il teorema delle dimensioni $dimKer(A - 2I_5)^2 = 5 - 3 = 2$. Ne segue subito per Grassmann, dato che $dim\mathbb{R}^5 = 5$, che $dimKer(A - I_5)^3 = 5 - 2 = 3$. Troviamo ora esplicitamente $Ker(A - 2I_5)^2$: Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{cases} -x_1 - x_5 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $x_1 = -x_5$, $x_3 = 0$ e $x_4 = 0$, ovvero i vettori che stanno in $Ker(A-2I_5)^2$ sono quelli del tipo

$$\begin{pmatrix} -x_5 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$Ker(A-2I_5)^2 = Span(\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}) = Span(e_2, e_5 - e_1)$$

Consideriamo allora la matrice che rappresenta A ristretta al sottospazio $Span(e_2, e_5 - e_1)$, che avrà per colonne le coordinate nella base $C = \{e_2, e_5 - e_1\}$ delle immagini di e_2 e $e_5 - e_1$ tramite A:

$$[A \cdot e_2]_C = \left[\begin{pmatrix}2&0&0&0&0\\1&2&0&-1&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\-1&0&0&1&1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right]_C = \left[\begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right]_C = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

$$[A \cdot (e_5 - e_1)]_C = \left[\begin{pmatrix}2&0&0&0&0\\1&2&0&-1&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\-1&0&0&1&1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right]_C = \left[\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\0\\2\end{pmatrix}\right]_C = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

e quindi

$$M_{A_{|Span(e_2, e_5 - e_1)}} = \begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$$

e quindi su questo sottospazio A si diagonalizza. In particolare notiamo che $Ker(A-2I_5)^2 = Ker(A-2I_5)$, infatti è generato da due autovettori di A, con autovalore relativo uguale a 2 (cioè i due elementi che generano $Ker(A-2I_5)^2$ sono due autovettori relativi all'autovalore 2 e dunque generano anche $Ker(A-2I_5)$). Se riuscissimo a dimostrare che $Ker(A-I_5)^3 = Ker(A-I_5)$, avremmo finito in quanto avremmo dimostrato che $\mathbb{R}^5$ si spezza in somma diretta di autospazi. Consideriamo dunque la matrice $A - I_5$: calcoliamone il rango:

$$A - I_5 = \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&0&-1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\-1&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

si vede subito che $rnk(A-I_5) = 3$ infatti ha una colonna nulla e la quinta e la seconda colonna sono uguali (e le altre sono linearmente indipendenti). Segue subito da ciò che $dimKer(A-I_5) = 5 - 3 = 2$. Ma dato che avevamo stabilito in precedenza che $dimKer(A-I_5)^3 = 3$, non può essere che $Ker(A-I_5) = Ker(A-I_5)^3$ e dunque A non è diagonalizzabile in quanto non spezza $\mathbb{R}^5$ in somma diretta di autospazi.

Osservazione: Possiamo ricavare la forma di Jordan di A. Infatti sappiamo che $dimV_2(A) = dimV_2(A)^2 = 2$ e che dunque la matrice A può essere portata in una forma a blocchi con il blocco $M_{A_{|Span(e_2,e_5-e_1)}}$ in alto a sinistra. L'altro blocco è relativo all'autovalore 1: sappiamo che non può essere diagonale, in quanto, se lo fosse, anche A sarebbe diagonalizzabile, in contraddizione a quanto appena dimostrato: deve dunque essere fatta a più blocchi di Jordan. Dato che la dimensione dell'autospazio relativo a 1 è 2, per motivi teorici, ci sono due blocchi di Jordan relativi all'autovalore 1 e la somma delle dimensioni di questi due blocchi deve essere 3, ovvero un blocco deve avere dimensione 2 (matrice 2×2) e l'altro blocco dimensione 1 (numero). Dunque la forma di Jordan della matrice è

$$\begin{pmatrix}2&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

dove vediamo che l'ultimo blocco (costituito dal quadrato 2×2 in basso a destra) è ciò che non rende la matrice diagonale.

16.4 Esercizio 4

Sia $f \in End(V)$. Si dimostri che lo stesso $k \in \mathbb{N}$ per cui si stabilizza la successione dei nuclei è anche l'esponente per cui si stabilizza la successione (decrescente) delle immagini, ovvero

$$V \supset Imf \underset{\neq}{\supseteq} Imf^2 \underset{\neq}{\supseteq} ... \underset{\neq}{\supseteq} Imf^k = Imf^{k+1} = ...$$

Si dimostri inoltre che tale k è la massima potenza di t che divide il polinomio minimo di f, ovvero che $\mu_f(t) = t^k q(t)$ con $q(t) \in \mathbb{K}[t]$ e $q(0) \neq 0$.

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che la successione, così come è scritta, ha senso, infatti $\forall k \in \mathbb{N}$, $Imf^k \supset Imf^{k+1}$: dato $w \in Imf^{k+1}$, si ha che esiste un $v \in V$ tale che $f^{k+1}(v) = w$, ma si ha che $f^{k+1}(v) = f^k(f(v)) \in Imf^k$ e dunque $w \in Imf^k$. Peraltro, ha senso anche che la successione si stabilizzi, infatti V ha dimensione finita e positiva e le immagini in successione sono contenute l'una dentro l'altra, ma non uguali e dunque anche la successione delle dimensioni è decrescente: su un segmento di $\mathbb{N}$ non esistono successioni strettamente decrescenti a valori positivi. Sappiamo inoltre che k, per ipotesi, è tale che $dimKerf^k = dimKerf^{k+1}$, ma allora per la formula di nucleo e immagine si ha che $dimImf^k = dimV - dimKerf^k = dimV - dimKerf^{k+1} = dimImf^{k+1}$. Inoltre la successione delle immagini si stabilizza proprio allo stesso k, infatti, considerando che $dimKerf^{k-1} < dimKerf^k$, si ha che $dimImf^{k-1} = dimV - dimKerf^{k-1} > dimV - dimKerf^k = dimImf^k$ ovvero $Imf^{k-1} \underset{\neq}{\supseteq} Imf^k$. Questo dimostra il primo fatto.
Per quanto riguarda il secondo, abbiamo visto che per la successione dei nuclei, il minimo k tale per cui la successione dei nuclei delle potenze dei fattori irriducibili che compaiono all'interno della fattorizzazione del polinomio caratteristico di f si stabilizza è il numero positivo r_λ, che indica l'esponente a cui eleviamo il fattore irriducibile p (relativo all'autovalore λ) che compare nella fattorizzazione del polinomio minimo di f: con parole umane se $\mu_f(t) = p_1^{r_1}...p_s^{r_s}$ allora $\{0\} \underset{\neq}{\subseteq} Kerp_i(f) \underset{\neq}{\subseteq} Kerp_i(f)^2 \underset{\neq}{\subseteq} ... \underset{\neq}{\subseteq} Kerp_i(f)^{r_i} = Kerp_i(f)^{r_i+1} = ...$ $\forall i = 1, ..., s$. Ma allora questo è vero anche quando consideriamo $\lambda = 0$, ovvero quando facciamo le iterate di f e dunque di conseguenza, la massima potenza per cui t divide il polinomio minimo è il punto in cui si stabilizza la successione dei nuclei, che è la stessa in cui si stabilizza la successione delle immagini.

Proponiamo una dimostrazione alternativa e più diretta: si è fatto vedere che se $dimV < +\infty$, allora $\exists k \in \mathbb{N}$ tale che $Imf^k = Imf^{k+1}$, mostriamo allora per induzione che $\forall h \geq 1$, $Imf^k = Imf^{k+h}$.
Passo base: $h = 1$, vero in quanto già dimostrato sopra.
Passo induttivo: supponiamo che $Imf^k = Imf^{k+1} = ... = Imf^{k+h-1}$, vogliamo mostrare che $Imf^{k+h-1} = Imf^{k+h}$. Consideriamo $f(Imf^{k+h-1})$: ciò è uguale a Imf^{k+h}, ma per ipotesi è anche uguale a Imf^{k+1}, che ancora per ipotesi è Imf^k, ovvero $Imf^k = Imf^{k+h-1} = Imf^{k+h}$.

Osservazione: Per quanto visto a teoria si ha che

$$dimKer(f \circ g) = dimKerg + dim(Img \cap Kerf)$$

da cui segue subito che, sostituendo $g = f^{k-1}$, si ha

$$dimKerf^k = dimKerf^{k-1} + dim(Imf^{k-1} \cap Kerf)$$

A livello teorico dunque, dato che la successione dei nuclei si stabilizza, arriveremo a una punto in cui $dimKerf^k = dimKerf^{k-1}$, che implica ovviamente che $dim(Imf^{k-1} \cap Kerf) = 0$, ovvero che aumentando con le potenze tale intersezione prima o poi diventerà banale (costituita dal solo 0).

16.5 Decomposizione di Fitting

Sia $f \in End(V)$: se esistono $W, U \subset V$ f-invarianti tali che $V = U \oplus W$, $f_{|W}$ sia nilpotente, ovvero $\exists k \in \mathbb{N}$ tale per cui $f^k = 0$, e $f_{|U}$ sia invertibile, allora la coppia (W, U) si chiama decomposizione di Fitting relativa a f. Prendendo dunque una base $B \subset U$ e una base $C \subset W$ si ha che la matrice associata a f nella base adattata $D = B \cup C$ è diagonale a blocchi

$$M_D^D(f) = \begin{pmatrix} A_1 & | & 0 \\ 0 & | & A_2 \end{pmatrix}$$

e tale per cui A_1 è nilpotente (ovvero $\exists k \in \mathbb{N}$ tale per cui $A_1^k = 0$) e A_2 è invertibile (N.B. A_1 e A_2 sono quadrate ma non hanno necessariamente la stessa taglia).

Proposizione: Esiste ed è unica la decomposizione di Fitting di un endomorfismo.

Dimostrazione. Per dimostrarlo utilizziamo la successione dei nuclei e delle immagini. Fissiamo dunque $k \in \mathbb{N}$ tale che la successione dei nuclei e delle immagini di f^j (per $j = 1, 2, ...$) si stabilizzi; si è visto a teoria inoltre che tale k è la massima potenza di t che divide $\mu_f(t)$. Definiamo $W = Kerf^k$ e $U = Imf^k$, essi sono spazi f-invarianti in quanto f e f^k commutano tra di loro. Chiaramente $f^k_{|W} = 0$, in quanto stiamo valutando f^k sugli elementi del suo nucleo; da quanto visto a teoria, se W è un sottospazio f-invariante, allora $f^k_{|W} = (f_{|W})^k$ e dunque $(f_{|W})^k = 0$, che implica $f_{|W} = 0$, ovvero $f_{|W}$ è nilpotente. Per quanto riguarda U, è vero che $f_{|U} : U \longrightarrow U$, in quanto U è f-invariante e dunque per dimostrare che $f_{|U}$ è invertibile ci basta dimostrare che è iniettiva: ma si è osservato in precedenza che $dimKerf^{k+1} = dimKerf^k + dim(Imf^k \cap Kerf)$ e dato che $dimKerf^{k+1} = dimKerf^k$ per ipotesi, si ha che $dim(Imf^k \cap Kerf) = dim(U \cap Kerf) = 0 \Longrightarrow U \cap Kerf = \{0\}$, ma per questioni teoriche $U \cap Kerf = Ker(f_{|U})$ e dunque $Ker(f_{|U}) = \{0\}$, ovvero $f_{|U}$ è iniettiva, che implica $f_{|U}$ invertibile. Abbiamo dunque trovato due sottospazi f-invarianti, per cui la restrizione di f sul primo è nilpotente e la restrizione di f sul secondo è invertibile. Vogliamo ora dimostrare che $V = U \oplus W$: per fare ciò mostriamo che $U \cap W = \{0\}$: sia allora $v \in U \cap W$, dato che $v \in U$, allora esiste un $w \in V$ tale per cui $f^k(w) = v$ e dato che $v \in W$, $f^k(v) = 0$, ma allora $f^{2k}(w) = f^k(f^k(w)) = f^k(v) = 0$ e dunque $w \in Kerf^{2k}$ e dato che la successione dei nuclei si stabilizza a k, si ha che $w \in Kerf^{2k} = Kerf^k$ e quindi $f^k(w) = 0 \Longrightarrow v = 0$ e dunque W e U sono in somma diretta e per questioni dimensionali $dim(U + W) = dimU + dimW = dimV$ e dunque per contenimento e uguaglianza dimensionale si ha che $U \oplus W = V$. Abbiamo dunque mostrato l'esistenza della decomposizione di Fitting.
Mostriamo ora che tale decomposizione è unica: supponiamo che esistano due sottospazi U e W f-invarianti tali per cui $f_{|W}$ è nilpotente, $f_{|U}$ è invertibile e $V = W \oplus U$. Dato che U è f-invariante e $f_{|U}$ è invertibile, si ha che $f^k_{|U}$ è invertibile e in particolare surgettiva, ovvero $f^k(U) = U$ e dunque $U \subset Imf^k$. Ma d'altra parte $Kerf^k \subset W$ in quanto $f^k_{|U}$ è iniettiva e dunque $Kerf^k_{|U} = \{0\}$ e i restanti valori per cui f^k si annulla possono essere contenuti in W (e dato che anche $0 \in W$, si ha che $Kerf^k \subset W$), ma visto che $f^k(W) = 0$ si ha che $W \subset Kerf^k$ e dunque per doppio contenimento $W = Kerf^k$, da cui segue subito per ragioni dimensionali che $U = Imf^k$: abbiamo così mostrato l'unicità della decomposizione di Fitting:

$$V = Kerf^k \oplus Imf^k$$

N.B. (**Lemma di Fitting**): Se V è uno spazio vettoriale irriducibile, ovvero tale per cui gli unici sottospazi f-invarianti sono V e $\{0\}$, allora o f è nilpotente o è invertibile. La dimostrazione è una diretta conseguenza della decomposizione.

16.6 Esercizio 5

Siano $A \in M(n, \mathbb{C})$ e $B \in GL(n, \mathbb{C})$ tali che

$$A^{k+1} = A \cdot B^k + B \cdot A^k$$

per qualche $k \geq 2$. Dimostrare che ImA è B-invariante.

Dimostrazione. Vogliamo qui dimostrare che ImA è B-invariante, ovvero che dato $w \in ImA$, si ha che $B \cdot w \in ImA$. Per farlo, esplicitiamo la relazione che sussiste tra A e B: possiamo riscrivere la relazione di sopra come segue:

$$B \cdot A^k = A^{k+1} - A \cdot B^k = A \cdot (A^k - B^k)$$

Moltiplicando ambo i lati di questa relazione per un vettore $v \in \mathbb{C}^n$ (ovvero applicando l'endomorfismo associato a quelle matrici a v) si ha

$$(B \cdot A^k) \cdot v = (A \cdot (A^k - B^k)) \cdot v = A \cdot ((A^k - B^k) \cdot v)$$

Dato che $(A^k - B^k)\cdot v \in \mathbb{C}^n$ si ha che $A\cdot((A^k - B^k)\cdot v) \in ImA$ e dunque che $(B\cdot A^k)\cdot v \in ImA$. Generalizzando a tutto $\mathbb{C}^n$ si ha che

$$B(ImA^k) \subset ImA$$

Se riusciamo a dimostrare che $ImA^k = ImA$ abbiamo finito. Per farlo, mostriamo che $KerA = KerA^k$, ovvero che la successione dei nuclei si stabilizza per $k = 1$ e dunque, per quanto visto nell'Esercizio precedente, anche la successione delle immagini si stabilizza per $k = 1$. Per mostrare quella uguaglianza, facciamo vedere che i due insiemi hanno la stessa dimensione, dato che l'inclusione $KerA \subset KerA^k$ è ovvia in quanto la successione dei nuclei è crescente (uguaglianza dimensionale e contenimento): sappiamo che $A\cdot B^k = (A-B)\cdot A^k$, quindi se $v \in KerA^k$, allora $A \cdot B^k \cdot v = (A-B)\cdot A^k \cdot v = 0$, ovvero $v \in Ker(A\cdot B^k)$, che si generalizza a $KerA^k \subset Ker(A\cdot B^k)$. Ma allora $dimKerA^k \leq dimKer(A\cdot B^k)$: quest'ultima dimensione, per quanto visto a teoria la possiamo scrivere come

$$dimKer(A\cdot B^k) = dimKerB^k + dim(ImB^k \cap KerA)$$

ma B è invertibile, dunque $dimKerB^k = 0$ e $ImB^k = \mathbb{C}^n$, ovvero

$$dimKer(A\cdot B^k) = dimKerA$$

da cui segue, sostituendo in quanto detto poco fa, che

$$dimKerA^k \leq dimKerA$$

dato che, dall'inclusione ovvia $KerA \subset KerA^k$, si ha che $dimKerA \leq dimKerA^k$, per doppia disuguaglianza si ha che $dimKerA = dimKerA^k$ e dunque che $KerA = KerA^k$, che dimostra la tesi. Dunque ImA è B-invariante.

16.7 Esempio di decomposizione di Fitting per endomorfismi triangolabili

Sia $A \in M(n,\mathbb{R})$ definita da

$$A = \begin{pmatrix} J(0,k_1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & J(\lambda_1,k_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & J(\lambda_s,k_{s+1}) \end{pmatrix}$$

una matrice in forma di Jordan costituita da $s+1$ blocchi (tali per cui $k_1 + ... + k_{s+1} = n$). Notiamo che il blocco $J(0,k_1)$ relativo all'autovalore 0, nient'altri è se non l'autospazio generalizzato relativo a 0, ovvero il nucleo dell'applicazione lineare L_A^k, dove k è l'indice per cui la successione dei nuclei di L_A si stabilizza ($\{0\} \subsetneqq KerL_A \subsetneqq ... \subsetneqq KerL_A^k = KerL_A^{k+1} = ...$), mentre la sottomatrice a blocchi

$$\begin{pmatrix} J(\lambda_1,k_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J(\lambda_s,k_{s+1}) \end{pmatrix} \in M(n-k_1,\mathbb{R})$$

è invertibile in quanto ha determinante non nullo (prodotto degli elementi sulla diagonale). Notiamo inoltre che il polinomio caratteristico di $J(0,k_1)$ è t^{k_1} e dunque il polinomio minimo di L_A sulla restrizione al blocco $J(0,k_1)$ è del tipo t^r con $1 \leq r \leq k_1$: ma allora $(L_{A_{|J(0,k_1)}})^r = 0$, ovvero $L_{A_{|J(0,k_1)}}$ è nilpotente: abbiamo così determinato una decomposizione di Fitting di $\mathbb{R}^n$ tramite L_A: ma dato che si era dimostrato essere unica, si ha che essa è la sola decomposizione di Fitting possibile per $\mathbb{R}^n$ tramite L_A.
Si è dunque trovato un modo per determinare facilmente una decomposizione di Fitting: se L_A è un endomorfismo triangolabile (e dunque ammette una base di Jordan), la forma normale di Jordan per L_A determina in maniera univoca la decomposizione di Fitting di $\mathbb{R}^n$ tramite L_A, e in particolare il sottospazio su cui L_A è nilpotente è il blocco $J(0,k_1)$ relativo all'autovalore 0, mentre il sottospazio su cui L_A è invertibile è la matrice ottenuta dalla forma normale di Jordan di L_A a cui togliamo le righe e le colonne relative a $J(0,k_1)$. Quindi, per essere più precisi

$$W = V_0', \quad U = \bigoplus_{0\neq\lambda\in sp(L_A)} V_\lambda'$$

17 Esercitazione 14-03-2022

17.1 Esercizio 1

Sia $A \in M(2, \mathbb{R})$ una generica matrice del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

determinare i possibili polinomi minimi di A e di conseguenze analizzare le forme di Jordan che può assumere tale matrice.

Soluzione: Dato che A è una matrice 2×2, il suo polinomio minimo avrà grado al massimo 2 (dal momento che in $\mathbb{R}^2$ non possiamo avere più di 2 vettori linearmente indipendenti), quindi i possibili polinomi minimi di A sono:

$$\mu_A(t) = \begin{cases} t - \lambda \quad (i) \\ (t-\lambda)^2 \quad (ii) \\ (t-\lambda_1)(t-\lambda_2) \quad (iii) \\ t^2 + \alpha t + \beta \quad \text{(irriducibile)} \quad (iv) \end{cases}$$

Analizziamo i casi separatamente:

· (i) $\mu_A(t) = t - \lambda$, allora A soddisfa l'equazione $A - \lambda I_2 = 0$, ovvero $A = \lambda I_2$, da cui A è una matrice diagonale e ha forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

· (ii) In questo caso il polinomio minimo di A è completamente fattorizzabile, ma le sue radici non hanno molteplicità algebrica pari a 1 e quindi, per un teorema visto a teoria, A è triangolabile ma non è diagonalizzabile. Essendo triangolabile possiamo trovare il suo blocco di Jordan: dato che A ha un solo auovalore, avremo un unico blocco di Jordan possibile, ovvero

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

esiste allora una base $B \in \mathbb{R}^2$ (di Jordan) tale per cui

$$M_B^B(L_A) = J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

· (iii) In questo caso il polinomio minimo di A è completamente fattorizzabile e ogni sua radice ha molteplicità algebrica uguale a 1: quindi A è diagonalizzabile e dato che i suoi autovalori sono λ_1 e λ_2 la sua forma di Jordan sarà costituita da 2 blocchi 1×1 e sarà fatta come segue

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

· (iv) In questo caso il polinomio minimo di A non è fattorizzabile e dunque A non è triangolabile: non può dunque esistere una forma di Jordan per A.

17.2 Esercizio 2

Sia $A \in M(2, \mathbb{R})$ definita da

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

trovare, se esiste, la forma di Jordan di A.

Soluzione: troviamo in primo luogo il polinomio minimo di A con il metodo delle potenze:

$$A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^1 = A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -5 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}$$

Notiamo che possiamo fermarci, in quanto il polinomio minimo di un endomorfismo ha grado minore o uguale alla dimensione dello spazio (che in questo caso è 2) in quanto divide il polinomio caratteristico che ha grado pari alla dimensione dello spazio: quindi sicuramente non dobbiamo calcolare le potenze oltre il quadrato: la relazione di dipendenza lineare tra le 3 matrici è:

$$\begin{pmatrix} 14 & -5 \\ 10 & -1 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^2 - 5A + 6A^0 = 0$$

e dunque ne segue che

$$\mu_A(t) = t^2 - 5t + 6 = (t-2)(t-3)$$

Rifacendoci all'Esercizio precedente, vediamo subito che il polinomio minimo di A è del tipo (iii) e dunque possiamo diagonalizzare A come segue

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

che è proprio la forma di Jordan di A.

17.3 Esercizio 3

Sia $A \in M(2, \mathbb{R})$ definita da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

trovare, se esiste, la forma di Jordan di A.

Soluzione: troviamo in primo luogo il polinomio minimo di A con il metodo delle potenze:

$$A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 24 \\ -6 & 21 \end{pmatrix}$$

Notiamo che possiamo fermarci, in quanto il polinomio minimo di un endomorfismo ha grado minore o uguale alla dimensione dello spazio (che in questo caso è 2) in quanto divide il polinomio caratteristico che ha grado pari alla dimensione dello spazio: quindi sicuramente non dobbiamo calcolare le potenze oltre il quadrato: la relazione di dipendenza lineare tra le 3 matrici è

$$\begin{pmatrix} -3 & 24 \\ -6 & 21 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} - 9 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^2 - 6A + 9A^0 = 0$$

e dunque ne segue che

$$\mu_A(t) = t^2 - 6t + 9 = (t-3)^2$$

Rifacendoci all'Esercizio 1 di questa esercitazione , vediamo subito che il polinomio minimo di A è del tipo (ii) e dunque la sua forma di Jordan sarà

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

17.4 Esercizio 4

Sia $A \in M(3, \mathbb{R})$ una generica matrice di taglia 3×3: determinare i possibili polinomi minimi di A e di conseguenza analizzare le forme di Jordan che può assumere tale matrice.

Soluzione: Dato che A è una matrice 3×3, il suo polinomio minimo avrà grado al massimo 3 (dal momento che in $\mathbb{R}^3$ non possiamo avere più di 3 vettori linearmente indipendenti), quindi i possibili polinomi minimi di A sono:

$$\mu_A(t) = \begin{cases} t - \lambda \quad (i) \\ (t-\lambda)^2 \quad (ii) \\ (t-\lambda_1)(t-\lambda_2) \quad (iii) \\ (t-\lambda)^3 \quad (iv) \\ (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)^2 \quad (v) \\ (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)(t-\lambda_3) \quad (vi) \\ (t-\lambda)(t^2+\alpha t+\beta) \quad \text{(irriducibile)} \quad (vii) \end{cases}$$

Analizziamo i casi separatamente:

· (*i*) $\mu_A(t) = t - \lambda$, allora A soddisfa l'equazione $A - \lambda I_3 = 0$, ovvero $A = \lambda I_3$, da cui A è una matrice diagonale e ha forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

· (*ii*) In questo caso A ammette un solo autovalore, ma non è diagonalizzabile in quanto λ non ha molteplicità algebrica 1 nel polinomio minimo (tuttavia è triangolabile in quanto il polinomio minimo è completamente fattorizzabile). Dalla teoria sappiamo che la potenza massima con cui compare un autovalore nella fattorizzazione di $\mu_A(t)$ è pari alla grandezza del blocco di Jordan relativo a quell'autovalore, ovvero il blocco di Jordan relativo a λ ha ordine 2. Dunque l'unica possibile forma di Jordan per A è

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

· (*iii*) In questo caso A ammette due autovalori distinti, entrambi con molteplicità 1 nella fattorizzazione del polinomio minimo, ovvero sappiamo che A è diagonalizzabile. Tuttavia, non sappiamo quale dei due autovalori ha due blocchi di Jordan: esistono allora due possibilità per la forma di Jordan che A può assumere:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

ovviamente, a seconda della situazione, siamo in grado di determinare esplicitamente quale dei due autovalori ha due blocchi di Jordan, utilizzando ad esempio la molteplicità algebrica dell'autovalore (che è uguale a quella geometrica in quanto A è diagonalizzabile).

· (*iv*) In questo caso A ammette un solo autovalore, ma non è diagonalizzabile in quanto λ non ha molteplicità algebrica 1 nel polinomio minimo (tuttavia è triangolabile in quanto il polinomio minimo è completamente fattorizzabile). Dalla teoria sappiamo che la potenza massima con cui compare un autovalore nella fattorizzazione di $\mu_A(t)$ è pari alla grandezza del blocco di Jordan relativo a quell'autovalore, ovvero il blocco di Jordan relativo a λ ha ordine 3. Dunque l'unica possibile forma di Jordan per A è

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

· (*v*) In questo caso A ammette due autovalori distinti, tali per cui l'autovalore λ_1 ha molteplicità algebrica 1 e dunque il suo blocco di Jordan ha ordine 1 e λ_2 ha molteplicità algebrica 2 e dunque il suo blocco di Jordan ha ordine 2: l'unica forma di Jordan possibile è

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

· (*vi*) In questo caso A ammette tre autovalori distinti e il polinomio minimo di A è completamente fattorizzabile (ogni autovalore ha molteplicità algebrica 1 nella fattorizzazione di μ_A), dunque A è diagonalizzabile e l'unica forma di Jordan possibile è

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

· (*vii*) In questo caso il polinomio minimo di A non è fattorizzabile e dunque A non è triangolabile: non può dunque esistere una forma di Jordan per A.

17.5 Esercizio 5

Sia $A \in M(3, \mathbb{R})$ definita da

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

trovare, se esiste, la forma di Jordan di A.

Soluzione: troviamo in primo luogo il polinomio minimo di A: notiamo che A è già triangolare superiore quindi cerchiamo prima il polinomio caratteristico (hanno gli stessi fattori irriducibili):

$$p_A(t) = det(tI_3 - A) = det \begin{pmatrix} t-2 & -1 & 1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix} = (t-1)^2(t-2)$$

Vediamo subito che 2 è un autovalore con molteplicità geometrica pari a 1, infatti ricordando che $mg(2, A) \leq ma(2, A) = 1$, si ha necessariamente che $mg(2, A) = 1$. E dunque, se esiste la forma di Jordan di A, essa avrà un blocco 1×1 che conterrà solo 2. Troviamo ora il polinomio minimo di A con il metodo delle potenze:

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notiamo che queste tre matrici non sono linearmente indipendenti, in quanto

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^2 - 3A + 2A^0 = 0$$

e dunque il polinomio minimo di A è

$$\mu_A(t) = t^2 - 3t + 2 = (t-2)(t-1)$$

Siamo così nel caso (iii) dell'Esercizio precedente, ovvero A è diagonalizzabile: sappiamo inoltre che il numero di blocchi relativi a 1 coincide con la molteplicità algebrica di 1, che in questo caso è 2: abbiamo 2 blocchi di ordine 1 relativi all'autovalore 1 e 1 blocco di ordine 1 relativo all'autovalore 2. La forma di Jordan di A è così

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

17.6 Esercizio 6

Sia $A \in M(4, \mathbb{R})$ definita da

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

trovare, se esiste, la forma di Jordan di A.

Soluzione: Per prima cosa determiniamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(t) = det(tI_4 - A) = det \begin{pmatrix} t-2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & t-1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & t-2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & t+1 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} t-2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & t-1 & 1 & -1 \\ 0 & 4-t & t-3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & t+1 \end{pmatrix} =$$

$$= (t-2) det \begin{pmatrix} t-1 & 1 & -1 \\ 4-t & t-3 & 2 \\ 3 & -2 & t+1 \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4-t & t-3 & 2 \\ 3 & -2 & t+1 \end{pmatrix} = (t-1)^4 \quad \text{(a fiducia)}$$

La matrice A ammette così il solo autovalore 1 (e dato che p_A è completamente fattorizzabile in $\mathbb{R}$, A è triangolabile ed esiste la forma di Jordan per A). Cerchiamo la forma di Jordan di A tramite la stringa degli invarianti di A. Cominciamo dunque a calcolare $dimKer(A - I_4)$ tramite il rango:

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Notiamo subito che la terza e la quarta colonna sono opposte e che la somma tra la prima e la terza equivale alla seconda moltiplicata per $-\frac{2}{3}$: ne segue quindi che $rnk(A - I_4) = 2$ e che dunque $dimKer(A - I_4) = 4 - 2 = 2 = mg(1, A)$. Per quanto visto a teoria il numero di blocchi della forma di Jordan è uguale alla molteplicità geometrica dell'autovalore: ci sono solo due blocchi nella forma di Jordan di A (non sappiamo però le loro dimensioni). Continuiamo dunque calcolando $dimKer(A - I_4)^2$, che è il secondo termine che compare nella stringa invariante di A: troviamo il suo rango:

$$(A - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

che ha banalmente rango 1: dunque $dimKer(A - I_4)^2 = 4 - 1 = 3$. Calcoliamo infine $dimKer(A - I_4)^3$:

$$(A - I_4)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha banalmente rango 0 e quindi $dimKer(A-I_4)^3 = 4-0 = 4$ e dunque $Ker(A-I_4)^3 = \mathbb{R}^4$ per contenimento e uguaglianza dimensionale. (Notare che da tutto ciò segue direttamente che $\mu_A(t) = (t - 1)^3$ e che quindi 3 è l'ordine massimo del blocco di Jordan relativo a 1: ricordiamo inoltre che esiste SEMPRE almeno un blocco di Jordan di ordine "massimo"). Abbiamo così esplicitamente che la stringa invariante di A è

$$D_1(A) = (2, 3, 4)$$

e per quanto visto a teoria si ha che b_i (=numero di blocchi di ordine i), per $i = 1, 2, 3$, è

$$b_1 = 2d_1 - d_0 - d_2 = 4 - 0 - 3 = 1$$

$$b_2 = 2d_2 - d_1 - d_3 = 6 - 2 - 4 = 0$$

$$b_3 = 2d_3 - d_2 - d_4 = 8 - 3 - 4 = 1$$

ovvero la forma di Jordan di A ha 2 blocchi, uno di ordine 1 e uno di ordine 3, entrambi relativi all'autovalore 1:

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

17.7 Esercizio 7

Sia $A \in M(5, \mathbb{R})$ definita da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

trovare la forma di Jordan di A.

Soluzione: Per prima cosa determiniamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(t) = det(tI_5 - A) = det \begin{pmatrix} t-1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & t-1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & t-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix} = (t-1)^4(t-2)$$

Vediamo subito che 2 è un autovalore singolo, quindi la sua molteplicità geometrica è uguale a 1 e dunque ci sarà un solo blocco di Jordan relativo all'autovalore 2. Ci basta dunque trovare la stringa invariante $D_1(A)$: cominciamo con il determinare $dimKer(A-I_5)$ tramite il rango:

$$A - I_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha ovviamente rango 3 in quanto la prima riga è nulla e la seconda e la terza sono uguali, inoltre la quarta e la quinta non sono una multipla dell'altra, quindi $rnk(A - I_5) = 3$ e così $dimKer(A - I_5) = 5 - 3 = 2$. Continuiamo con $dimKer(A - I_5)^2$: la matrice

$$(A - I_5)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 2 e quindi $dimKer(A - I_5)^2 = 5 - 2 = 3$.
Continuiamo con $dimKer(A - I_5)^3$: la matrice

$$(A - I_5)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 1 e quindi $dimKer(A - I_5)^3 = 5 - 1 = 4$. Possiamo fermarci, in quanto sappiamo che $Ker(A-I)^r$ ha al massimo dimensione 4, dato che è in somma diretta con $Ker(A-2I_5)$ per generare tutto $\mathbb{R}^5$. Si ha così che

$$D_1(A) = (2, 3, 4)$$

e quindi per quanto visto a teoria si ha che b_i (=numero di blocchi di ordine i), per $i = 1, 2, 3$, è

$$b_1 = 2d_1 - d_0 - d_2 = 4 - 0 - 3 = 1$$
$$b_2 = 2d_2 - d_1 - d_3 = 6 - 2 - 4 = 0$$
$$b_3 = 2d_3 - d_2 - d_4 = 8 - 3 - 4 = 1$$

ovvero la forma di Jordan di A ha 3 blocchi, uno relativo all'autovalore 2 di ordine 1, uno relativo all'autovalore 1 di ordine 1 e uno relativo all'autovalore 1 di ordine 3:

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

17.8 Esercizio 8

Sia $A \in M(5, \mathbb{R})$ definita da

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

stabilire se A può ammettere o meno una forma di Jordan e in caso affermativo trovare una base di Jordan per A.

Soluzione: Per prima cosa troviamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(t) = det(tI_5 - A) = det \begin{pmatrix} t-2 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t+1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & t-1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & t+2 \end{pmatrix} = t^5 \quad \text{(sulla fiducia)}$$

Dato che il polinomio caratteristico di A è completamente fattorizzabile, si ha che A è triangolabile e dunque ammette una forma di Jordan. Per di più, dalla teoria sappiamo che $\mu_A(t)|p_A(t)$ e quindi che $p_A(A) = 0$, ovvero $A^5 = 0$, ovvero A è nilpotente. Per trovare una base di Jordan di A ci basta allora considerare i nuclei $KerA^i$.
Cominciamo trovando $KerA$: notiamo subito che $rnkA = 3$ in quanto la prima e l'ultima colonna sono uguali e la terza e la quarta sono opposte e dunque $dimKerA = 5 - 3 = 2$: troviamo esplicitamente questo nucleo:

$$KerA = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

che si traduce nel sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_5 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_3 = x_4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $x_3 = x_4$, $x_2 = 0$, $x_5 = -x_1$, ovvero i vettori che stanno nel nucleo di A sono quelli del tipo

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ x_3 \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = Span(e_1 - e_5, e_4 + e_3)$$

e dunque

$$KerA = Span(e_1 - e_5, e_4 + e_3)$$

Adesso dobbiamo procedere in modo analogo per le potenze di A: determiniamo $KerA^2$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$KerA^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

che si traduce nel sistema lineare

$$\begin{cases} 0=0 \\ 0=0 \\ x_1+3x_2+x_5=0 \\ x_1+3x_2+x_5=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $x_1 = -3x_2 - x_5$ ovvero i vettori che stanno nel nucleo di A^2 sono quelli del tipo

$$\begin{pmatrix} -3x_2-x_5 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in Span(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) =$$

$$= Span(e_2 - 3e_1, e_3, e_4, -e_1 + e_5)$$

e dunque

$$KerA^2 = Span(3e_1 - e_2, e_3, e_4, e_1 - e_5)$$

Notiamo già che $dimKerA^2 = 4$ e quindi A^3 dovrà essere la matrice nulla: infatti

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque$KerA^3 = \mathbb{R}^5$.
Come vogliamo ragionare per trovare una base di Jordan di A? Vogliamo scrivere $KerA^3 = \mathbb{R}^5$ come somma diretta tra $KerA^2$ e un altro sottospazio U_1 supplementare a $KerA^2$ e poi reiterare con gli altri nuclei: notiamo che $dimKerA^2 = 4$ e quindi ci basta trovare un vettore v che non stia in $KerA^2$, in questo modo $Span(v) \oplus KerA^2 = KerA^3$. Notiamo che $e_1 \notin KerA^2$ (infatti la prima colonna di A^2 non è nulla) e dunque

$$KerA^2 \oplus Span(e_1) = KerA^3$$

Per quanto visto a teoria, vogliamo ora scrivere $KerA^2$ come somma diretta tra $KerA$, $L_A(U_1)$ e un supplementare U_2: notiamo che $L_A(U_1) = L_A(Span(e_1)) = Span(L_A(e_1)) = Span(2e_1 + e_4 - 2e_5)$ (è la prima colonna di A). Si deve dunque determinare un sottospazio $U_2 \in \mathbb{R}^5$ tale per cui

$$KerA^2 = KerA \oplus Span(2e_1 + e_4 - 2e_5) \oplus U_2$$

basta completare l'insieme $C = \{e_1 - e_5, e_4 + e_3, 2e_1 + e_4 - 2e_5\}$ a base di $KerA^2$ che ha dimensione 4: dobbiamo così aggiungere un vettore v tale per cui $v \in KerA^2$ e $v \notin Span(e_1 - e_5, e_4 + e_3, 2e_1 + e_4 - 2e_5)$. Ci basta scrivere allora v come combinazione lineare di elementi di $KerA^2$ e imporre poi la non appartenenza:

$$v = \alpha(-3e_1 + e_2) + \beta e_3 + \gamma e_4 + \delta(-e_1 + e_5) = (-3\alpha - \delta)e_1 + \alpha e_2 + \beta e_3 + \gamma e_4 + \delta e_5$$

Per imporre la non appartenenza ci basta scrivere la matrice che ha per colonne gli elementi dell'insieme C a cui si aggiunge la colonna che ha per coordinate le coordinate di v rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^5$ e imporre che essa abbia rango massimo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3\alpha-\delta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 1 & \gamma \\ -1 & 0 & -2 & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{R_5 \mapsto R_5 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3\alpha-\delta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & -3\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \mapsto R_4 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3\alpha-\delta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma-\beta \\ 0 & 0 & 0 & -3\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3\alpha-\delta \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & \gamma-\beta \\ 0 & 0 & 0 & -3\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3\alpha-\delta \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma-\beta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & -3\alpha \end{pmatrix}$$

essa è una matrice a scalini e ha rango massimo se e solo se $\alpha \neq 0$, dunque, se ad esempio scegliamo il vettore $v = 1 \cdot (-3e_1 + e_2) + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4 + 0 \cdot (-e_1 + e_5) = -3e_1 + e_2$ siamo sicuri che $B = \{e_1 - e_5, e_4 + e_3, 2e_1 + e_4 - 2e_5, -3e_1 + e_2\}$ è una base di $KerA^2$ e quindi $U_2 = Span(-3e_1 + e_2)$. Riassumendo quanto detto finora

$$\mathbb{R}^5 = KerA^2 \oplus Span(e_1) \quad \text{e} \quad KerA^2 = KerA \oplus Span(2e_1 + e_4 - 2e_5) \oplus Span(-3e_1 + e_2)$$

Ci manca dunque scrivere $KerA$ come somma diretta tra $L_A(Span(2e_1+e_4-2e_5))$, $L_A(Span(-3e_1+e_2))$ e un eventuale supplementare U_3: tuttavia il nucleo di A è bidimensionale e quindi la somma diretta tra $L_A(Span(2e_1 + e_4 - 2e_5)) = Span(L_A(2e_1 + e_4 - 2e_5)) = Span(e_3 + e_4)$ e $L_A(Span(-3e_1 + e_2)) = Span(L_A(-3e_1 + e_2)) = Span(-5e_1 + 5e_5)$ lo genera e quindi

$$KerA = Span(e_3 + e_4) \oplus Span(-5e_1 + 5e_5)$$

Sostituendo ricorsivamente otteniamo

$$\mathbb{R}^5 = Span(e_3+e_4) \oplus Span(-5e_1+5e_5) \oplus Span(2e_1+e_4-2e_5) \oplus Span(-3e_1+e_2) \oplus Span(e_1)$$

e dunque, per motivi teorici, una base di Jordan per A è l'insieme

$$\{e_3 + e_4, -5e_1 + 5e_5, 2e_1 + e_4 - 2e_5, -3e_1 + e_2, e_1\}$$

17.9 Esercizio 9

Sia $f \in End(V)$, si dimostri che la successione $a_k = dimKerf^k - dimKerf^{k-1}$ è decrescente.

Soluzione: Notiamo che possiamo scrivere f^k come $f^k = f \circ f^{k-1}$. Per quanto visto a teoria, sappiamo che

$$dimKerf^k = dimKer(f \circ f^{k-1}) = dimKerf^{k-1} + dim(Imf^{k-1} \cap Kerf)$$

ovvero

$$dimKerf^k - dimKerf^{k-1} = dim(Imf^{k-1} \cap Kerf)$$

Dal momento che la successione a sinistra è decrescente, dato che per quanto visto nell'Esercizio 4 della scorsa esercitazione la successione dei nuclei è decrescente, si ha che anche la successione di sinistra è decrescente.

17.10 Esercizio 10

Sia $A \in M(3, \mathbb{R})$ definita da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

stabilire se A può ammettere o meno una forma di Jordan e in caso affermativo trovare una base di Jordan per A.

Soluzione: Per prima cosa troviamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(t) = det(tI_3 - A) = \begin{pmatrix} t-1 & -1 & 1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ -9 & -2 & t-7 \end{pmatrix} = (t-1)det\begin{pmatrix} t-1 & 1 \\ -9 & t-7 \end{pmatrix} =$$

$$= (t-1)[(t-1)(t-7)+9] = (t-1)(t^2 - 8t + 16) = (t-1)(t-4)^2$$

e quindi A ammette una forma di Jordan in quanto è triangolabile. Notiamo subito che $ma(1, A) = 1$ e dunque anche $mg(1, A) = dimKer(A - I_3) = 1$ ovvero l'autovalore 1 contribuisce con un solo blocco di Jordan di ordine 1; non possiamo ancora dire niente sull'autovalore 4. Possiamo così scrivere lo spazio $\mathbb{R}^3$ come

$$\mathbb{R}^3 = Ker(A - I_3) \oplus Ker(A - 4I_3)^2$$

Cerchiamo dunque una base di Jordan per A, utilizzando la decompozione di sopra: innanzitutto occupiamoci dell'autospazio $Ker(A - I_3)$: troviamo chi è $Ker(A - I_3)$:

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

vogliamo cercare un vettore v tale per cui $(A - I_3) \cdot v = 0$, ovvero

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che si traduce nel sistema

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ 9x + 2y + 6z = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $y = z$, $x = -\frac{8}{9}z$ ovvero appartengono a $Ker(A - I_3)$ tutti i vettori della forma

$$z \begin{pmatrix} -\frac{8}{9} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow Ker(A - I_3) = Span(\begin{pmatrix} -\frac{8}{9} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = Span(\begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix})$$

si ha così che il vettore $\begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} = -8e_1 + 9e_2 + 9e_3$ è un autovettore per A e dunque esso è il primo vettore della base di Jordan per A.

Passiamo all'autospazio $Ker(A - 4I_3)^2$: cerchiamo innanzitutto la forma esplicita di $(A - 4I_3)^2$:

$$A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 9 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A - 4I_3)^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 9 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 9 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

(N.B. Questa matrice ha rango 1 e ogni altra matrice del tipo $(A - 4I_3)^n$, con $n \geq 2$, ha rango 1, questo perché la successione dei nuclei di $A - 4I_3$ si stabilizza per un numero minore o uguale di 2, che è l'esponente del fattore relativo a 2 nel polinomio caratteristico, e dunque, dato che la dimensione di $Ker(A - 4I_3)^2$ è 2, anche la dimensione dei nuclei con potenze successive sarà 2). Cerchiamo quindi ora di scrivere $Ker(A - 4I_3)^2$ come somma diretta tra $Ker(A - 4I_3)$ e un altro autospazio: notiamo in primo luogo che $dimKer(A - 4I_3) = 1$ in quanto $rnk(A - 4I_3) = 2$ e per di più la prima colonna è uguale a tre volte la terza, quindi il vettore $e_1 - 3e_3$ appartiene al nucleo di $A - 4I_3$ (l'immagine è la differenza tra la prima colonna di A e il triplo della terza, che è 0) e dunque $Ker(A - 4I_3) = Span(e_1 - 3e_3)$; mentre per quanto riguarda $(A - 4I_3)^2$ si ha che $rnk(A - 4I_3)^2 = 1$ e dunque $dimKer(A - 4I_3)^2 = 2$ e dato che sia la prima che la terza colonna sono nulle si ha che $e_1, e_3 \in Ker(A - 4I_3)^2$, ovvero $Ker(A - 4I_3)^2 = Span(e_1, e_3)$ (in quanto sono linearmente indipendenti). Quest'analisi ci conferma anche che il polinomio minimo di A è $p_A(t)$, in quanto il fattore $(t - 4)$ non può avere esponente 1, dato che le dimensioni di $Ker(A - 4I_3)$ e $dimKer(A - 4I_3)^2$ sono diverse. Consideriamo quindi $Ker(A - 4I_3)^2$: vogliamo scrivere questo nucleo come somma diretta tra $Ker(A - 4I_3)$ e un supplementare U_1: dato che $dimKer(A - 4I_3) = 1$ e $dimKer(A - 4I_3)^2 = 2$, ci basta prendere $U_1 = Span(v)$ con $v \in Ker(A - 4I_3)^2$, ma $v \notin Ker(A - 4I_3)$: notiamo che $e_3 \in Ker(A - 4I_3)^2$ e $e_3 \notin Ker(A - 4I_3)$, quindi $U_1 = Span(e_3)$ è un buon supplementare:

$$Ker(A - 4I_3)^2 = Ker(A - 4I_3) \oplus Span(e_3)$$

Scriviamo ora $Ker(A - 4I_3)$ come somma diretta tra l'immagine di $Span(e_3)$ tramite L_{A-4I_3} e un eventuale supplementare U_2:

$$Ker(A - 4I_3) = L_{A-4I_3}(Span(e_3)) \oplus U_2 = Span((A - 4I_3)(e_3)) \oplus U_2 = Span(-e_1 + 3e_3) \oplus U_2$$

notiamo tuttavia che $dimKer(A - 4I_3) = dimSpan(-e_1 + 3e_3)$ e dunque $U_2 = \{0\}$, si ha così

$$Ker(A - 4I_3) = Span(-e_1 + 3e_3) \Longrightarrow Ker(A - 4I_3)^2 = Span(-e_1 + 3e_3) \oplus Span(e_3)$$

Giungiamo così alla conclusione che una base di Jordan per A è data da

$$B = \{-8e_1 + 9e_2 + 9e_3, -e_1 + 3e_3, e_3\}$$

Verifichiamo che effettivamente è così: troviamo la matrice associata a L_A nella base B

$$[A \cdot (-8e_1 + 9e_2 + 9e_3)]_B = [-8e_1 + 9e_2 + 9e_3]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[A \cdot (-e_1 + 3e_3)]_B = [4(-e_1 + 3e_3)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[A \cdot e_3]_B = [-e_1 + 7e_3]_B = [-e_1 + 3e_3 + 4e_3]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$M_B^B(L_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

che è proprio la forma di Jordan di A: $J(A) = M_B^B(L_A)$.

18 Esercitazione 21-03-2022

18.1 Esercizio 1

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $f \in \mathcal{T}(V)$ e $dimV = n$. Sia $J(f)$ la forma di Jordan di f, definita da $J(f) = J(\lambda, n)$, ovvero una forma costituita da un unico blocco. Quanti sottospazi f-invarianti di V ci sono? Che dimensione hanno?

Soluzione: Cominciamo notando una cosa importante: esistono 2 sottospazi f-invarianti ovvi, che sono V e $\{0\}$, di cui sappiamo anche le dimensioni, ovvero n e 0. D'ora in poi ci concentreremo solo su sottospazi propri non banali e tenteremo di dare una risposta alle due domande.
Osserviamo innanzitutto che, a meno di passare a $g = f - \lambda id_V$, possiamo assumere $\lambda = 0$: in questo modo ogni sottospazio di V f-invariante è anche un sottospazio g-invariante (in poche parole, se λ è non nullo, posso costruire un'applicazione g, dipendente da f e nilpotente). Questa considerazione ci permette di poter assumere f nilpotente.
Cerchiamo alcuni sottospazi f invarianti che conosciamo per questioni teoriche: il primo esempio è $Kerf^k$ (siamo ancora sotto l'ipotesi che $\lambda = 0$); sappiamo inoltre che $dimKerf^k = k$ $\forall k = 1, ..., n$ in quanto la forma di Jordan di f ha per ipotesi la forma

$$J(f) = J(0, n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

e ogni sua potenza ha la forma (visto a teoria)

$$J(f)^h = \begin{pmatrix} 0 & J(0, n-h+1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e dato che la prima colonna del blocco di Jordan è nulla, il rango di $J(f)^h$ è $n - h$ e dunque $dimKerJ(f)^h = dimKerf^h = h$. Ma allora per ogni $k \in \{1, ..., n\}$ esiste almeno un sottospazio f invariante.

Sia ora $W \subset V$ f-invariante e consideriamo $\mu_{f_{|W}}$: per ragioni teoriche $\mu_{f_{|W}} | \mu_f$ e dato che f è nilpotente (ovvero esiste $r > 0$ tale per cui $f^r = 0$) $\mu_f = t^s$ per un qualche $s \leq n$, ma allora $\mu_{f_{|W}} = t^a$ per un qualche $a \leq s$; sappiamo inoltre che $p_{f_{|W}} = t^{dimW}$: da tutto ciò segue banalmente che $f_{|W}^{dimW} = 0$ e quindi $W \subset Kerf^{dimW}$ (in quanto $f_{|W} : W \longrightarrow W$), ma abbiamo dimostrato sopra che $dimKerf^h = h$ e quindi $dimKerf^{dimW} = dimW$: per contenimento e uguaglianza dimensionale $Kerf^k = W$.

Abbiamo così dimostrato che, sotto l'ipotesi che la forma di Jordan di f sia costituita da un unico blocco, tutti e soli i sottospazi f-invarianti di V sono i sottospazi del tipo $Kerf^k$ con $k = 0, ..., n$, i quali hanno tutti dimensione $k = 0, ..., n$.

18.2 Esercizio 2

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $f \in \mathcal{T}(V)$ e $dimV = n$. Sia $J(f)$ la forma di Jordan di f, definita da $J(f) = diag(J(\lambda, k), J(\mu, n-k))$, ovvero una forma costituita da 2 blocchi, con $\mu \neq \lambda$. Quanti sottospazi f-invarianti di V ci sono? Che dimensione hanno?

Soluzioni: Ragioniamo come nell'Esercizio precedente: cerchiamo una famiglia di sottospazi e poi verifichiamo se quelli sono tutti i sottospazi che possiamo avere.
Sicuramente $Ker(f - \lambda id_V)^r$ e $Ker(f - \mu id_V)^s$ con $r, s \in \mathbb{N}$ sono f-invarianti (in quanto $(f - \lambda id_V)^r$ e $(f - \mu id_V)^s$ commutano con f): quanto vale la loro dimensione? Ovviamente $Ker(f - \lambda id_V)^r \subset V'_\lambda$ e $Ker(f - \mu id_V)^s \subset V'_\mu$, che sono distinti in quanto $\mu \neq \lambda \Longrightarrow$ $Ker(f - \lambda id_V)^r = Ker(f - \lambda id_V)^r_{|V'_\lambda} \oplus \{0\} \subset V'_\lambda \oplus V'_\mu = V$ (in quanto μ e λ sono gli unici autovalori di f e dunque, per decomposizione primaria, V può essere scritto come somma diretta degli autospazi generalizzati di f relativi a λ e μ). Per quanto dicono le ipotesi, la forma di Jordan di $(f - \lambda id_V)^r_{|V'_\lambda}$ è costituita da un unico blocco di dimensione uguale alla

dimensione dell'autospazio generalizzato V'_λ: possiamo allora ragionare come nell'Esercizio 1 e arrivare ad affermare che $dimKer(f - \lambda id_V)^r = r$. Di conseguenza, possiamo considerare $Ker(f - \lambda id_V)^r \oplus Ker(f - \mu id_V)^s$: dato che entrambi i sottospazi sono f-invarianti anche la loro somma è f-invariante e ha, per Grassmann, dimensione pari alla somma delle dimensioni.
Notiamo che, a differenza dell'Esercizio precedente, non esiste un unico sottospazio di dimensione k: infatti, basta considerare anche soltanto il caso $k = 1$: sia $Ker(f - \lambda id_V)$ che $Ker(f - \mu id_V)$ hanno dimensione 1 (ma anche in questo caso per ogni dimensione esiste almeno un sottospazio di quella dimensione, costruibile come somma diretta dei nuclei delle potenze di $f - \lambda id_V$ e $f - \mu id_V$).

Vogliamo ora caratterizzare i sottospazi f-invarianti rispetto a f: sia $W \subset V$ f-invariante con $dimW = h$. Il polinomio minimo di f ristretto a W divide per ragioni teoriche μ_f: $\mu_{f_{|W}} | \mu_f$ e dunque $\mu_{f_{|W}} = (t - \lambda)^{r'}(t - \mu)^{s'}$. Per di più il polinomio caratteristico di f ristretto a W è $p_{f_{|W}} = (t-\lambda)^a(t-\mu)^b$ con $a+b = h$. Ragionando come nell'Esercizio 1 si ha che $W \subset Ker(f - \lambda id_V)^a \oplus Ker(f - \mu id_V)^b$ e per contenimento e uguaglianza dimensionale si ha che $W = Ker(f - \lambda id_V)^a \oplus Ker(f - \mu id_V)^b$.

Anche in questo caso abbiamo trovato tutti e soli i sottospazi f-invarianti.

Osservazione: Lo stesso ragionamento si adatta nel caso in cui la forma di Jordan sia costituita da s blocchi distinti (tutti relativi ad autovalori distinti).

18.3 Esercizio 3

Sia $f \in \mathcal{T}(V)$ tale che la sua forma di Jordan sia

$$J(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J(\lambda_1, 1) & 0 & 0 \\ 0 & J(\lambda_2, 2) & 0 \\ 0 & 0 & J(\lambda_3, 2) \end{pmatrix}$$

con $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ autovalori di f. Contare gli autospazi f-invarianti.

Soluzione: Seguendo il ragionamento dei due Esercizi precedenti, si ha che le dimensioni entro cui variano gli autospazi f-invarianti stanno tra 0 e 5: contiamo gli autospazi per dimensione:

· Quanti sottospazi di V f-invarianti dimensione 0 ci sono? Ovviamente solo 1, che è quello banale.

· Quanti sottospazi di dimensione 1 ci sono? Ce ne sono tanti quante sono le soluzioni non negative di $a + b + c = 1$, ovvero 3: $(a, b, c) = (1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)$ (Stars & Bars).

· Quanti sottospazi di dimensione 2 ci sono? Ovviamente tutti i sottospazi del tipo $Ker(f - \lambda_i id_V) \oplus Ker(f - \lambda_j id_V)$ hanno dimensione 2 e ce ne sono esattamente 3. In più, dobbiamo aggiungere gli altri due sottospazi $Ker(f-\lambda_2 id_V)^2$ e $Ker(f-\lambda_3 id_V)^2$ (non $Ker(f-\lambda_1 id_V)^2$ in quanto il suo blocco di Jordan ha ordine 1 e quindi $dimKer(f - \lambda_1 id_V)^2 = dimKer(f - \lambda_1 id_V) = 1$).

· Quanti sottospazi di dimensione 3 ci sono? Ci sono $Ker(f - \lambda_2 id_V)^2 \oplus Ker(f - \lambda_1 id_V)$, $Ker(f-\lambda_2 id_V)^2 \oplus Ker(f-\lambda_3 id_V)$, $Ker(f-\lambda_3 id_V)^2 \oplus Ker(f-\lambda_1 id_V)$, $Ker(f-\lambda_3 id_V)^2 \oplus Ker(f - \lambda_2 id_V)$, $Ker(f - \lambda_2 id_V) \oplus Ker(f - \lambda_1 id_V) \oplus Ker(f - \lambda_3 id_V)$.

· Quanti sottospazi di dimensione 4 ci sono? Ci sono $Ker(f - \lambda_2 id_V)^2 \oplus Ker(f - \lambda_1 id_V) \oplus Ker(f - \lambda_3 id_V)$, $Ker(f - \lambda_3 id_V)^2 \oplus Ker(f - \lambda_2 id_V)^2$, $Ker(f - \lambda_2 id_V) \oplus Ker(f - \lambda_1 id_V) \oplus Ker(f - \lambda_3 id_V)^2$.

· Quanti sottospazi di dimensione 5 ci sono? C'è ovviamente il solo V.

18.4 Esercizio 4

Sia $\mathbb{K}$ un campo infinito e sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n. Sia $f \in \mathcal{T}(V)$ e sia $J(f)$ la forma di Jordan di f definita da due blocchi relativi allo stesso autovalore

$$J(f) = \begin{pmatrix} J(\lambda, k) & 0 \\ 0 & J(\lambda, n-k) \end{pmatrix}$$

Dimostrare che esistono infiniti sottospazi f-invarianti.

Dimostrazione. Facciamo la medesima osservazione fatta nell'Esercizio 1: senza perdita di generalità, posto $g = f - \lambda id_V$, assumiamo $\lambda = 0$. D'ora in poi indicheremo con U e W i sottospazi generati dai primi k e dai successivi $n-k$ vettori di una base di Jordan di f; in particolare chiamiamo $J(f_{|U}) = J(0,k)$ e $J(f_{|W}) = J(0,n-k)$: notiamo che in entrambi gli spazi U e W f-invarianti sappiamo quali e quanti sottospazi f-invarianti abbiamo (Esercizio 1). In particolare, le basi di Jordan per U e W sono cicliche, ovvero della forma $B = \{f^{k-1}(u), f^{k-2}(u), ..., f(u), u\} \subset U$ e $D = \{f^{n-k-1}(w), f^{n-k-2}(w), ..., f(w), w\} \subset W$ e in più $B \cup D \subset V$ è una base di Jordan per f.
Notiamo inoltre che conosciamo la dimensione di $Kerf^i$, infatti $dimKerf^i = dimKerJ(f)^i$ ovvero

$$J(f)^i = \begin{pmatrix} J(0,k) & 0 \\ 0 & J(0,n-k) \end{pmatrix}^i = \begin{pmatrix} J(0,k)^i & 0 \\ 0 & J(0,n-k)^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J(0,k-i+1) & 0 \\ 0 & J(0,n-k-i+1) \end{pmatrix}$$

e per quanto visto a teoria il rango di questa matrice è $rnkJ(f)^i = max0, k-i+maxn-k-i, 0$ e dunque, se $i < k$, si ha che $rnkJ(f)^i = k-i+n-k-i = n-2i$ e dunque, per la formula di nucleo e immagine $dimKerJ(f)^i = n-n+2i = 2i$; se $i \geq k$, si ha che $rnkJ(f)^i = n-k-i$ e quindi, per la formula di nucleo e immagine $dimKerJ(f)^i = n-n+k+i = k+i$: riassumendo

$$dimKerf^i = \begin{cases} 2i & i < k \\ k+i & i \geq k \end{cases}$$

Fissiamo adesso $\alpha \in \mathbb{K}$: vogliamo costruire per ogni α una famiglia di sottospazi: definiamo

$$\mathcal{V}_i^\alpha = \begin{cases} Span(f^{i-1}(u+\alpha w), ..., u+\alpha w) & i < k \quad \text{(Notare che sono distinti al variare di } \alpha \text{ e dunque sono infiniti)} \\ Span(f^{k-1}(u+\alpha w), ..., u+\alpha w, f^{i-k}(w), ..., f(w)) & i \geq k \end{cases}$$

Osserviamo che in questo modo $u, w \notin \mathcal{V}_i^\alpha$, ma se consideriamo $\mathcal{V}_i^\alpha + \mathcal{V}_i^\beta$ (con $\beta \in \mathbb{K}$), si ha che $w \in \mathcal{V}_i^\alpha + \mathcal{V}_i^\beta$ e per di più $\mathcal{V}_i^\alpha + \mathcal{V}_i^\beta \neq \mathcal{V}_i^\alpha, \mathcal{V}_i^\beta$ e quindi $\mathcal{V}_i^\alpha \neq \mathcal{V}_i^\beta$: abbiamo così un numero di sottospazi f-invarianti pari almeno alla cardinalità di $\mathbb{K}$, in quanto, facendo variare il parametro di riferimento, varia il sottospazio associato definito come sopra; ma dato che $\mathbb{K}$ è infinito per ipotesi, otteniamo una famiglia infinita di sottospazi f-invarianti per ogni dimensione compresa tra 1 e $n-1$.

18.5 Esercizio 5

Sia $A \in M(3, \mathbb{R})$ definita da

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si trovi, se esiste, una base di Jordan per A.

Soluzione: Cominciamo cercando il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(t) = det(tI_n - A) = det \begin{pmatrix} t-3 & 0 & -2 \\ 1 & t-2 & -3 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix} = (t-2)[(t-3)t+2] = (t-2)^2(t-1)$$

Dato che il polinomio caratteristico di A è completamente fattorizzabile, A è triangolabile e ammette una forma di Jordan. In particolare, notiamo che l'autovalore 1 ha $ma(1, A) = 1$ e dunque $mg(1, A) = dimKer(1, A) = d_1(1, A) = 1$, ovvero l'autovalore 1 contribuisce nella forma di Jordan di A con un unico blocco di ordine 1. Per decomposizione primaria possiamo scrivere

$$\mathbb{R}^3 = Ker(A - I_3) \oplus Ker(A - 2I_3)^2$$

Per quanto visto a teoria ci basta dunque trovare due basi cicliche, una per $Ker(A - I_3)^2$ e una per $Ker(A - I_3)$: dato che $Ker(A - I_3)$ ha dimensione 1, una sua base ciclica è data banalmente da un autovettore: cerchiamolo:

$$Ker(A - I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

che si traduce nel sistema

$$\begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ -x + y + 3z = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases}$$

che ha per soluzioni $x = -z$, $y = -4z$, ovvero

$$Ker(A - I_3) = \left\{ z \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} = Span(\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}) = Span(-e_1 - 4e_2 + e_3)$$

e dunque il vettore $-e_1 - 4e_2 + e_3$ è un autovettore per A relativo all'autovalore 1 e può essere considerato il primo vettore della base di Jordan di A. Focalizziamoci adesso su $Ker(A - 2I_3)^2$: tentiamo di trovare una sua base ciclica. Cominciamo considerando $Ker(A - 2I_3)$:

$$Ker(A - 2I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

e dato che la matrice $A - 2I_3$ (scritta sopra) ha ovviamente $rnk(A - 2I_3) = 2$ (e quindi $dimKer(A - 2I_3)^2 = 1$) e la seconda colonna nulla, si ha che banalmente $Ker(A - 2I_3) = Span(e_2)$. Invece, consideriamo $Ker(A - 2I_3)^2$: troviamo prima la matrice $(A - 2I_3)^2$:

$$(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e quindi si ha che

$$Ker(A - 2I_3)^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

che si traduce nel sistema

$$\begin{cases} -x - 2z = 0 \\ -4x - 8z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

che ha per soluzione $x = -2z$, ovvero

$$Ker(A - 2I_3)^2 = \left\{ \begin{pmatrix} -2z \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; y, z \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= Span(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = Span(-2e_1 + e_3, e_2)$$

Per quanto visto a teoria dobbiamo ora scrivere $Ker(A - 2I_3)^2$ come somma diretta tra $Ker(A - 2I_3)$ e un supplementare U_1:

$$Ker(A - 2I_3)^2 = Ker(A - 2I_3) \oplus U_1$$

Come determiniamo U_1? Basta pensare che $Ker(A - 2I_3)$ è generato da e_2, che è un vettore di $Ker(A - 2I_3)^2$, dunque basta che $U_1 = Span(-2e_1 + e_3)$ in modo tale che la somma sia

diretta (non c'è neanche bisogno di dimostrarlo in quanto sappiamo già che i due vettori formano una base di $Ker(A-2I_3)^2$!).
Procediamo con l'algoritmo: scriviamo ora $Ker(A-2I_3)$ come somma diretta tra $L_{A-2I_3}(U_1)$ e un altro eventuale supplementare U_2: dato che L_{A-2I_3} è iniettiva sulla restrizione a U_1 (ricordiamo che $Kerf_{|_W} = Kerf \cap W$ e in questo caso $KerL_{A-2I_3} \cap U_1 = 0$ in quanto sono in somma diretta) e quindi preserva le dimensione: dato che $dimU_1 = dimKer(A-2I_3) = 1$ si ha che $U_2 = \{0\}$: quindi, basta calcolarsi $L_{A-2I_3}(U_1) = Span(L_{A-2I_3}(-2e_1+e_3))$ per ottenere il sottospazio che genera $Ker(A-2I_3)$:

$$L_{A-2I_3}(-2e_1+e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 5e_2$$

e quindi si ha che $L_{A-2I_3}(U_1) = Span(5e_2)$, da cui

$$Ker(A-2I_3)^2 = Ker(A-2I_3) \oplus Span(-2e_1+e_3) = Span(5e_2) \oplus Span(-2e_1+e_3)$$

e dunque una base ciclica per $Ker(A-2I_3)^2$ è data da $B_{Ker(A-2I_3)^2} = \{5e_2, -2e_1+e_3\}$.

Si ha così che

$$B = \{-e_1-4e_2+e_3, 5e_2, -2e_1+e_3\}$$

è una base che Jordanizza A.
Facciamo vedere che effettivamente funziona, troviamo la matrice associata a L_A nella base B:

$$[A\cdot(-e_1-4e_2+e_3)]_B = [-e_1-4e_2+e_3]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[A\cdot 5e_2]_B = [10e_2]_B = [2\cdot 5e_2]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[A\cdot(-2e_1+e_3)]_B = [-4e_1+5e_2+2e_3]_B = [2(-2e_1+e_3)+5e_2]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e infatti, come voluto, la matrice associata ad A in questa base è

$$M_B^B(L_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

18.6 Esercizio 6

Sia $A \in M(3,\mathbb{R})$ definita da

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 7 & 6 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinare la sua forma di Jordan e, se non esiste, determinare la sua forma di Jordan reale.

Soluzione: Per prima cosa determiniamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(t) = det(tI_n - A) = \begin{pmatrix} t+1 & 2 & -2 \\ -7 & t-6 & 3 \\ -1 & -1 & t \end{pmatrix} = (t-1)(t^2-4t+5)$$

Notiamo che il polinomio non è completamente fattorizzabile e dunque A non ammette una forma di Jordan: cerchiamo dunque la sua forma di Jordan reale. Scomponiamo dunque il polinomio caratteristico in $\mathbb{C}$:

$$p_A(t) = (t-1)(t^2-4t+5) = (t-1)(t-2-i)(t-2+i)$$

Se vediamo A come matrice complessa, essa è diagonalizzabile, in quanto il suo polinomio caratteristico ha tutti autovalori di molteplicità algebrica 1 (e dunque anche di molteplicità geometrica 1) e la sua forma di Jordan è

$$J_{\mathbb{C}}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 2+i \end{pmatrix}$$

Come è fatta allora la forma di Jordan reale di A? Per quanto visto a teoria, i blocchi relativi agli autovalori reali sono identici, mentre al posto dei due blocchi relativi agli autovalori complessi, dobbiamo mettere un unico blocco di Jordan reale relativo a uno solo dei due autovalori complessi: scegliamo ad esempio $2+i$: dato che $\Re(2+i) = 2$ e $\Im(2+i) = 1$, per quanto visto a teoria il blocco reale relativo all'autovalore complesso ha la forma

$$\begin{pmatrix} \Re(2+i) & \Im(2+i) \\ -\Im(2+i) & \Re(2+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

e quindi la forma di Jordan reale di A è del tipo

$$J_{\mathbb{R}}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

18.7 Centralizzatore: alcuni appunti

Sia $A \in M(n, \mathbb{K})$, definiamo il centralizzatore di A come

$$C(A) = \{M \in M(n, \mathbb{K}) \mid A \cdot M = M \cdot A\}$$

ovvero come l'insieme delle matrici (della stessa taglia e definite sullo stesso campo) che commutano con A.
$C(A)$ è un sottospazio vettoriale di $M(n, \mathbb{K})$.
Se $B \in C(A)$, allora $A \in C(B)$; per di più se $P \in M(n, \mathbb{K})$ tale per cui $P \cdot A = A \cdot P^\top$, allora si ha anche che $B \in C(P)$, da cui segue che, se chiamiamo W_B l'insieme

$$W_B = \{M \in M(n, \mathbb{K}) \mid M \cdot B = B \cdot M^\top\}$$

allora $W_B \subset C(A)$.
Notiamo inoltre che $\forall k \geq 0$, $A^k \in C(A)$.
Sia poi $S \subset M(n, \mathbb{K})$, definiamo $C(S) = \{M \in M(n, \mathbb{K}) \mid M \cdot X = X \cdot M \ \ \forall X \in S\}$, ovvero come l'insieme delle matrici che commutano con tutte le matrici di S. Se poi $S' \subset S$, allora $C(S) \subset C(S')$, infatti se M commuta con tutte le matrici di S, allora commuta anche con le matrici di S' (dato che S' è un sottoinsieme).
Infine, per quanto visto nell'Esercizio 2 dell'esercitazione del 07/12/21, il centro di $M(n, \mathbb{K})$ è l'insieme dei multipli dell'identità, ovvero $Span(I_n)$, e dunque $Span(I_n) \in C(M)$ per ogni matrice quadrata di taglia n (ovvero il centralizzatore non è un sottospazio banale), da cui otteniamo anche che $\forall \alpha, \lambda \in \mathbb{K}$ (con $\alpha \neq 0$)

$$C(\alpha A + \lambda I_n) = C(A)$$

18.8 Esercizio 7

Siano $A_1, A_2 \in M(n, \mathbb{K})$ due matrici simili ($A_1 \sim A_2$), si dimostri che $C(A_1) \cong C(A_2)$.

Dimostrazione. Per ipotesi $A_1 \sim A_2$ e dunque $\exists\, N \in GL(n, \mathbb{K})$ tale per cui

$$A_1 = N \cdot A_2 \cdot N^{-1}$$

È facile vedere che se $M \in C(A_1)$ (ovvero $M \cdot A_1 = A_1 \cdot M$), allora $N \cdot M \cdot N^{-1} \in C(A_2)$, infatti

$$\begin{aligned} N \cdot M \cdot N^{-1} \cdot A_2 &= N \cdot M \cdot N^{-1} \cdot N \cdot A_1 \cdot N^{-1} = N \cdot M \cdot A_1 \cdot N^{-1} = \\ &= N \cdot A_1 \cdot M \cdot N^{-1} = N \cdot A_1 \cdot N^{-1} \cdot N \cdot M \cdot N^{-1} = A_2 \cdot N \cdot M \cdot N^{-1} \end{aligned}$$

Notare che vale anche il viceversa, la cui dimostrazione è identica.
Se definiamo allora

$$\Phi : C(A_1) \longrightarrow C(A_2) \qquad M \mapsto N \cdot M \cdot N^{-1}$$

abbiamo che questa mappa è una bigezione tra i due sottospazi (N.B. La mappa è ben definita in quanto N è univocamente determinata). Mostriamo che questa mappa è un omomorfismo:

· linearità: Siano $M_1, M_2 \in C(A_1)$, allora

$$\Phi(M_1 + M_2) = N \cdot (M_1 + M_2) \cdot N^{-1} = N \cdot M_1 \cdot N^{-1} + N \cdot M_2 \cdot N^{-1} = \Phi(M_1) + \Phi(M_2)$$

· omogeneità: Siano $M \in C(A_1)$ e $\mu \in \mathbb{K}$, allora

$$\Phi(\mu M) = N \cdot (\mu M) \cdot N^{-1} = \mu N \cdot M \cdot N^{-1} = \mu \Phi(M)$$

e dunque è un'applicazione lineare: essendo anche bigettiva si ha che Φ è un isomorfismo e quindi che $C(A_1) \cong C(A_2)$ (e dunque in particolare hanno la stessa dimensione).

19 Esercitazione 25-03-2022

19.1 Esercizio 1

Sia $A \in M(n, \mathbb{K})$ triangolabile tale che la sua forma di Jordan sia costituita da un unico blocco, ovvero $J(A) = J(\lambda, n)$, con $\lambda \in \mathbb{K}$. Si dimostri che $dimC(A) = n$.

Dimostrazione. Per quanto visto nell'Esercizio 7 della scorsa esercitazione, se due matrici sono simili, allora i loro centralizzatori sono isomorfi e dato che banalmente $A \sim J(A)$, si ha che $C(A) \cong C(J(\lambda, n))$. Per di più, per quanto detto nella scorsa esercitazione a proposito dei centralizzatori, si ha che $C(J(\lambda, n)) = C(J(\lambda, n) - \lambda I_n) = C(J(0, n))$: per trovare dunque $dimC(A)$ possiamo ridurci a trovare $dimC(J(0, n))$.
Sia $M \in M(n, \mathbb{K})$: scriviamola in funzione delle sue righe/colonne

$$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \dots \\ M_n \end{pmatrix} = (M^1|...|M^n)$$

Moltiplichiamola a destra per $J(0, n)$:

$$M \cdot J(0, n) = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \dots \\ M_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la prima colonna di questo prodotto è nulla, in quanto la prima colonna di $J(0, n)$ è nulla. La seconda colonna invece ha nell'elemento di riga 1, il primo elemento di M^1, nell'elemento di riga 2, il secondo elemento di M^1 e così via, ovvero la seconda colonna del prodotto è la prima colonna di M: ragionando nella stessa maniera otteniamo che la colonna i-esima del prodotto è uguale alla colonna $(i-1)$-esima di M, ovvero

$$M \cdot J(0, n) = (0|M^1|...|M^{n-1})$$

Svolgiamo adesso l'altro prodotto: ponendoli uguali otterremo la condizione di appartenenza al centralizzatore.

$$J(0, n) \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot (M^1|...|M^n)$$

Osserviamo che la prima riga di questa colonna è costituita nel modo seguente: nell'entrata $1, 1$ ha l'elemento di riga 2 e colonna 1 di M, nell'entrata $1, 2$ ha l'elemento di riga 2 e colonna 2 di M e così via, ovvero la prima riga del prodotto è uguale alla seconda riga di M: ragionando nella stessa maniera otteniamo che la riga i-esima del prodotto è uguale alla riga $(i+1)$-esima di M; l'ultima riga è invece nulla in quanto l'ultima riga di $J(0, n)$ lo è. Si ha così che il prodotto è

$$J(0, n) \cdot M = \begin{pmatrix} M_2 \\ \dots \\ M_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ponendo uguali i due prodotti otteniamo la condizione di appartenenza al centralizzatore:

$$\begin{pmatrix} M_2 \\ \dots \\ M_n \\ 0 \end{pmatrix} = (0|M^1|...|M^{n-1})$$

Ragioniamo adesso sulle colonne della matrice a sinistra: la prima colonna ad esempio contiene tutti gli elementi della prima colonna di M eccetto il primo e sappiamo che essa deve essere uguale alla prima colonna della matrice di destra, che è nulla: dunque tutta la prima colonna della matrice M (eccetto il primo elemento) deve essere nulla, ovvero

$$M^1 = \begin{pmatrix} m_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Andiamo avanti, rifacendoci ancora all'uguaglianza di prima: sappiamo che la seconda colonna della matrice di sinistra contiene tutti gli elementi della seconda colonna di M eccetto il primo e sappiamo che essa deve essere uguale alla seconda colonna della matrice di destra, che è la M^1 appena trovata e dunque tutta la seconda colonna di M, ad eccezione dei primi due elementi, deve essere nulla e per di più il secondo elemento di questa colonna è uguale al primo elemento di M^1, ovvero si ha che

$$M^2 = \begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ragionando sempre allo stesso modo, iteriamo e otteniamo che la matrice M deve avere una forma triangolare superiore e i suoi coefficienti devono essere gli stessi per ogni diagonale, ovvero

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \end{pmatrix}$$

dove $a_i \in \mathbb{K}\ \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. Abbiamo dunque trovato la forma esplicita di una generica matrice appartenente al centralizzatore di $J(0, n)$: essa dipende da n parametri liberi e possiamo vederla come combinazione lineare delle matrici

$$I_n,\ J(0, n),\ J(0, n)^2, ..., J(0, n)^{n-1}$$

ovvero l'insieme

$$B = \{I_n, J(0, n), J(0, n)^2, ..., J(0, n)^{n-1}\}$$

è una base di $C(J(0, n))$, che ha dunque dimensione $dimC(J(0, n)) = n$: dato che $C(J(0, n)) = C(J(\lambda, n)) \cong C(A)$, abbiamo dimostrato che $dimC(A) = n$.

19.2 Esercizio 2

Sia $A \in M(n, \mathbb{K})$ una matrice diagonalizzabile. Dimostra che $dimC(A) = \sum_{\lambda \in sp(A)} ma(\lambda, A)^2$ (dove con $ma(\lambda, A)$ indichiamo la molteplicità algebrica dell'autovalore).

Dimostrazione. Per quanto visto nell'Esercizio 7 della scorsa esercitazione, se due matrici sono simili, allora i loro centralizzatori sono isomorfi e dato che banalmente $A \sim J(A)$, si ha che $C(A) \cong C(J(\lambda, n))$; per di più dato che A è diagonalizzabile, sappiamo per motivi teorici che $J(A)$ è costituita da n blocchi e che dunque è diagonale. Consideriamo allora la matrice

$$J(A) = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & \lambda_{(1)} & & & & & & & \\ & & & \lambda_{(2)} & & & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & \lambda_{(2)} & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & 0 & & & & & \lambda_{(s)} & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \lambda_{(s)} \end{pmatrix}$$

Dove sulla diagonale troviamo l'autovalore $\lambda_(i)$ tante volte quanto vale la sua molteplicità algebrica. Sia ora $M \in M(n, \mathbb{K})$ definita come $M = (m_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. Imponiamo la condizione di appartenenza a centralizzatore: $J(A) \cdot M = M \cdot J(A)$. Notiamo che nel prodotto a sinistra l'elemento di posto i, j sarà il prodotto della riga i-esima di $J(A)$ con la colonna j-esima di M, ovvero sarà il prodotto tra λ_i (l'autovalore che sta nella riga i-esima) e m_{ij}, ovvero $\lambda_i m_{ij}$. A sinistra invece abbiamo esattamente l'opposto, ovvero $\lambda_j m_{ij}$, dove con λ_j ancora una volta designiamo l'autovalore che sta nella colonna j-esima. Dunque la matrice M appartiene al centralizzatore di $J(A)$ se e solo se $\forall i, j \in \mathbb{N}_n$ $\lambda_i m_{ij} = \lambda_j m_{ij}$ e questo succede se e solo se $\lambda_i = \lambda_j$ o se $m_{ij} = 0$. Quindi, se ad esempio l'autovalore $\lambda_{(1)}$ compare nelle prime k righe/colonne, allora se $i, j \leq k$ si ha che $\lambda_i = \lambda_k$ e quindi m_{ij} può assumere tanti valori quanto è la cardinalità di $\mathbb{K}$; se invece uno solo dei due è $> k$, allora i due autovalori sono sicuramente distinti e quindi si deve avere $m_{ij} = 0$: questo ci fa capire che la matrice M è costituita da blocchi quadrati di ordine $ma(\lambda_{(i)}, A)$ (con i che varia) ed è fatta come segue:

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & & & 0 \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_s \end{pmatrix}$$

dove $M_i \in M(ma(\lambda_{(i)}, \mathbb{K}))$. Dato che le equazioni di commutazione sono soddisfatte, una matrice come questa commuta con A. Inoltre, poiché questa matrice dipende da $\sum_{\lambda \in sp(A)} ma(\lambda, A)^2$ parametri liberi, una sua base avrà cardinalità $\sum_{\lambda \in sp(A)} ma(\lambda, A)^2$ e quindi $dimC(J(A)) = \sum_{\lambda \in sp(A)} ma(\lambda, A)^2$ e poiché $C(A) \cong C(J(A))$ si ha che $dimC(A) = \sum_{\lambda \in sp(A)} ma(\lambda, A)^2$.

Osservazione: da questa dimostrazione segue che se A è diagonalizzabile allora

$$C(A) = \mathbb{K}[A] \iff ma(\lambda, A) = 1 \; \forall \lambda \in sp(A)$$

Infatti $\mathbb{K}[A] \subset C(A)$, $dim\mathbb{K}[A] = deg\mu_A = |sp(A)|$ (in quanto A è diagonalizzabile) e per quanto visto ora $dimC(A) = \sum_{\lambda \in sp(A)} ma(\lambda, A)^2$: quindi se $ma(\lambda, A) = 1$ per ogni autovalore $dimC(A) = \sum_{\lambda \in sp(A)} ma(\lambda, A)^2 = |sp(A)|$, da cui $C(A) = \mathbb{K}[A]$ per contenimento e uguaglianza dimensionale. Viceversa se $C(A) = \mathbb{K}[A]$, allora $dimC(A) = dim\mathbb{K}[A]$ e quindi $\sum_{\lambda \in sp(A)} ma(\lambda, A)^2 = |sp(A)|$; poiché $ma(\lambda, A) \geq 1$, anche $ma(\lambda, A)^2 \geq 1$ e l'unico modo per far sì che ci sia uguaglianza è che $ma(\lambda, A)^2 = 1$, ovvero $ma(\lambda, A) = 1$.

19.3 Centralizzatore di una matrice: caso generale

Sia $A \in M(n, \mathbb{K})$ triangolabile e sia $J(A)$ la sua forma di Jordan:

$$J(A) = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & & 0 \\ & J(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

dove con $J(\lambda_i)$ intendiamo la matrice dai soli blocchi di Jordan relativi all'autovalore λ_i, ovvero

$$J(\lambda_i) = \begin{pmatrix} J(\lambda_i, k_1 i) & & & 0 \\ & J(\lambda_i, k_2 i) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J(\lambda_i, k_s i) \end{pmatrix}$$

Facciamo notare che se $M \in C(A)$, allora M preserva gli autospazi generalizzati, ovvero $M(V'_{\lambda_i}) \subset V'_{\lambda_i}$, infatti $V'_{\lambda_i} = Ker(A - \lambda_i I_n)^{r_{\lambda_i}}$ e se $v \in V'_{\lambda_i}$ allora $(A - \lambda_i I_n)^{r_{\lambda_i}}(M(v)) = M(A - \lambda_i I_n)^{r_{\lambda_i}}(v)$ in quanto M commuta con A, con I_n e con tutte le loro potenze e dunque, dato che $M(A - \lambda_i I_n)^{r_{\lambda_i}}(v) = 0$ e dunque $M(v) \in Ker(A - \lambda_i I_n)^{r_{\lambda_i}}$, ovvero $M(V'_{\lambda_i}) \subset V'_{\lambda_i}$. Dalla decomposizione primaria di V in autospazi generalizzati segue subito che M ha una forma diagonale a blocchi (in quanto gli autospazi sono M-invarianti), dove ogni blocco dipende da un autovalore, e ogni blocco ha ordine uguale all'ordine del blocco $J(\lambda_i)$ della forma di Jordan di A (che è uguale all'esponente per cui si stabilizza la successione dei nuclei relativamente all'autovalore λ_i). Possiamo dunque restringerci a studiare il caso in cui A sia fatta da blocchi relativi a un solo autovalore: una volta scoperto questo possiamo generalizzare quanto detto al caso più ampio.

Sia dunque A triangolare e tale per cui la sua forma di Jordan sia costituita da s blocchi relativi allo stesso autovalore

$$J(A) = \begin{pmatrix} J(\lambda, k_1) & & & 0 \\ & J(\lambda, k_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J(\lambda, k_s) \end{pmatrix}$$

Sia ora $M \in M(n, \mathbb{K})$ tale per cui $M \in C(J(A)) \cong C(A)$: possiamo pensare M fatta a blocchi come segue

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1s} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2s} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ M_{s1} & M_{s2} & \dots & M_{ss} \end{pmatrix}$$

tale per cui i blocchi sulla diagonale abbiano la stessa dimensione dei blocchi di Jordan di $J(A)$ (sono in egual numero e richiediamo che $dimJ(\lambda, k_1) = dimM_{11}$,...,$dimJ(\lambda, k_s) = dimMss$). Imponendo la commutatività otteniamo che $A \cdot M = M \cdot A \Longrightarrow J(\lambda, k_i) \cdot M_{ij} = M_{ij} \cdot J(\lambda, k_j)$ (infatti la matrice di Jordan contiene 0 dappertutto tranne che sui blocchi sulla diagonale): tale equazione ci pone delle restrizioni su come sono fatte le matrici che stanno in $C(A)$. Si ha in particolare che $J(\lambda, k_i) \cdot M_{ii} = M_{ii} \cdot J(\lambda, k_i)$ da cui segue che $M_{ii} \in \mathbb{K}[J(\lambda, k_i)]$.

19.4 Esercizio 3

Sia $\mathbb{F}/\mathbb{K}$ un'estensione di campi e sia $A \in M(n, \mathbb{K})$. Si dimostri che $\mu_A = \mu_{A_\mathbb{F}}$, ovvero che il polinomio minimo di una matrice non varia al variare del campo su cui definiamo la matrice.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che $q \in I(A) \Longrightarrow q(A) = 0$ e che $q \in \mathbb{K}[t]$: dato che $\mathbb{K} \subset \mathbb{F}$ si ha che $\mathbb{K}[t] \subset \mathbb{F}[t]$ e quindi possiamo pensare q come un polinomio a coefficienti in $\mathbb{F}$, ovvero $q_\mathbb{F}(A) = 0$: ma allora risulta naturale l'inclusione $I(A) \subset I(A_\mathbb{F})$ che implica che $\mu_A \in I(A) \subset I(A_\mathbb{F}) = (\mu_{A_\mathbb{F}}) \Longrightarrow \mu_{A_\mathbb{F}} | \mu_A$.
Pensando ora alla definizione di grado di polinomio minimo, ovvero $deg\mu_A = min\{s \,|\, \exists\, a_1, ...,$ $a_{s-1} \in \mathbb{K} \,:\, M^s + \sum_{i=0}^{s-1} a_i M^i = 0\}$ e possiamo vedere questa combinazione lineare come un sistema a coefficienti in $\mathbb{K}$, ovvero $a_0 I_n + a_1 A + ... + a_{s-1} A^{s-1} + A^s = 0$: ma sappiamo che un sistema a coefficienti in $\mathbb{K}$ ha soluzione in $\mathbb{K}$ se e solo ce l'ha in $\mathbb{F}$ in quanto $A \in M(n, \mathbb{K}) \subset M(n, \mathbb{F})$. Ma dunque $deg\mu_A = deg\mu_{A_\mathbb{F}}$ in quanto s è lo stesso sia per la matrice considerata in $M(n, \mathbb{K})$ che per la stessa considerata in $M(n, \mathbb{F})$.
Dunque, dato che uno divide l'altro, sono entrambi monici e hanno lo stesso grado si ha l'uguaglianza.

19.5 Esercizio 4

Sia $A \in M(6, \mathbb{R})$ definita da

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Si calcoli la forma di Jordan reale di A e si determini una base di Jordan reale per A.

Soluzione: Cominciamo calcolando il polinomio caratteristico di A con una tecnica furba:

$$p_A(t) = det(tI_n - A) = det \begin{pmatrix} t-3 & 2 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & t-1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & t-1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & t-1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & t-1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & t+1 \end{pmatrix} =$$

$$det \begin{pmatrix} t-3 & 2 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & t-1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & t-1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & t-1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & t-1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & t+1 \end{pmatrix}^{\top} = det \begin{pmatrix} t-3 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & t-1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & t-1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & t-1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & t-1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & t+1 \end{pmatrix}$$

Sappiamo ora che questa matrice può essere considerata come una matrice nella base canonica: se effettuiamo un cambio di base da $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ in $B' = \{e_3, e_4, e_1, e_2, e_5, e_6\}$ otteniamo

$$= det \begin{pmatrix} t-3 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & t-1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & t-1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & t-1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & t-1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & t+1 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-3 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & t-1 & -2 & 0 \\ t-1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & t-1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & t-1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & t+1 \end{pmatrix} =$$

$$= det \begin{pmatrix} t-1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & t-1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-3 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & t-1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & t-1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & t+1 \end{pmatrix}$$

Dove l'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che invertiamo prima e terza riga (e dunque dovremo moltiplicare per $(-1)^2 = 1$) e invertiamo seconda e quarta riga (e dunque dovremo moltiplicare per $(-1)^2 = 1$). Questa nuova matrice è diagonale a blocchi e dunque calcolarne il determinante è più semplice! In particolare si ha che

$$det \begin{pmatrix} t-1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & t-1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-3 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & t-1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & t-1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & t+1 \end{pmatrix} = [(t-1)^2+4] det \begin{pmatrix} t-3 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & t-1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & t-1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & t+1 \end{pmatrix}$$

e dunque ci basta trovare

$$det \begin{pmatrix} t-3 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & t-1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & t-1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & t+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \longrightarrow R_4 + R_1} det \begin{pmatrix} t-3 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & t-1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & t-1 & -2 \\ t-1 & 0 & 2 & t-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_4 \longrightarrow C_1 - C_4}$$

$$\xrightarrow{C_1 \longrightarrow C_1 - C_4} det \begin{pmatrix} t-1 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & t-1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & t-1 \end{pmatrix}$$

e anch'essa è diagonale a blocchi e quindi

$$det \begin{pmatrix} t-1 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & t-1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & t-1 \end{pmatrix} = [(t-1)^2 + 4]^2$$

e dunque il determinante originale è

$$p_A(t) = det\begin{pmatrix} t-3 & 2 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & t-1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & t-1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & t-1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & t-1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & t+1 \end{pmatrix} = (t^2-2t+5)^3$$

che non ha radici reali. Cerchiamo dunque la sua scomposizione in $\mathbb{C}$ e consideriamo A come una matrice a coefficienti complessi (troviamo cioè la sua forma di Jordan complessa): si ha che $t^2-2t+5=0 \iff t = 1 \pm 2i$ e dunque $(t^2-2t+5)^3 = (t-1-2i)^3(t-1+2i)^3$. Si ha dunque che

$$\mathbb{C}^6 = Ker(A-(1-2i)I_6)^3 \oplus Ker(A-(1+2i)I_6)^3$$

Possiamo limitarci a studiare $Ker(A-(1-2i)I_6)^3$ in quanto $1-2i$ e $1+2i$ sono coniugati (ci basta trovare una base di Jordan per $1-2i$). Troviamo allora $Ker(A-(1-2i)I_6)^3$: per prima cosa determiniamo $dimKer(A-(1-2i)I_6)$ ovvero della matrice

$$A-(1-2i)I_6 = \begin{pmatrix} 2+2i & -2 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2i & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2i & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2i & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2(i-1) \end{pmatrix}$$

troviamo il rango di questa matrice: notiamo che le prime 2 colonne sono linearmente indipendenti per la posizione degli zeri. Mostriamo che la terza non sta nello *Span* delle prime due colonne: mostriamo che non esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{pmatrix} 2\alpha+2i\alpha-2\beta \\ 2\alpha+2i\beta \\ 0 \\ 0 \\ 2\beta \\ 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2i \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In effetti tali parametri non esistono in quanto le posizioni 3 e 4 sono fisse e nulle.

Mostriamo che la quarta colonna non sta nello *Span* delle prime 3: mostriamo che non esistono $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{pmatrix} 2\alpha+2i\alpha-2\beta+\gamma \\ 2\alpha+2i\beta \\ 2i\gamma \\ 2\gamma \\ 2\beta-\gamma \\ 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dall'ultima otteniamo $\alpha = 0$, dalla terza e dalla quarta $\gamma = i$, dalla quinta $\beta = \frac{i}{2}$: sostituendo nella seconda $2\alpha + 2i\beta = 0 + 2i\frac{i}{2} = -1$ non in accordo con quanto scritto.

Terminiamo mostrando che la quinta e la sesta colonna appartengono a *Span* delle prime quattro:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2i \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -2 \\ 2i \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2i \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 2(i-1) \end{pmatrix} = (i-1)\begin{pmatrix} 2+2i \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2i \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2i \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi abbiamo che $rnk(A-(1-2i)I_6)=4$, da cui $dimKer(A-(1-2i)I_6)=6-4=2$. Troviamo esplicitamente questo nucleo: dato che la somma tra la prima colonna, la sesta colonna e $-i$ volta la quinta è uguale al vettore nullo, si ha che $e_1+e_6-ie_5 \in Ker(A-(1-2i)I_6)$, inoltre anche la somma tra la seconda, i volte la sesta e $(i+1)$ volte la quinta è uguale al vettore nullo e quindi anche $e_2+(i+1)e_5+ie_6 \in Ker(A-(1-2i)I_6)$ e dunque, per dimensione si ha che

$$Ker(A-(1-2i)I_6) = Span(e_1+e_6-ie_5,\ e_2+(i+1)e_5+ie_6)$$

Possiamo già scrivere la forma di Jordan complessa di A: infatti

$$J_{\mathbb{C}}(A) = \begin{pmatrix} J(1-2i) & 0 \\ 0 & J(1+2i) \end{pmatrix}$$

è composta da blocchi relativi agli autovalori $1-2i$ e $1+2i$ ed entrambi questi blocchi anno ordine 3; inoltre ogni blocco è diviso in altri blocchi, che sono tanti quanti la dimensione di $Ker(A-(1-2i)I_6)$ e di $Ker(A-(1+2i)I_6)$: concentrandoci su $Ker(A-(1-2i)I_6)$ sappiamo che è costituito da 2 blocchi e l'ordine totale deve essere 3, dunque avremo un blocco di ordine 2 e un blocco di ordine 1:

$$J_{\mathbb{C}}(A) = \begin{pmatrix} 1-2i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & J(1+2i) & \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

Dato che per quanto visto a teoria i blocchi di Jordan relativi a due autovalori coniugati sono uguali si ha che la forma completa di Jordan complessa è

$$J_{\mathbb{C}}(A) = \begin{pmatrix} 1-2i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+2i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+2i \end{pmatrix}$$

Possiamo dunque ricavare la forma di Jordan reale di A che sarà del tipo

$$J(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

dove abbiamo scelto arbitrariamente l'autovalore $1-2i$ e abbiamo sdoppiato come si è visto a teoria.

Cerchiamo ora una base reale di Jordan per A: per quanto visto a teoria ci basta trovare una base complessa relativa a $Ker(A-(1-2i)I_6)^3$.
Sappiamo che $dimKer(A-(1-2i)I_6)^3 = 3$ (è l'autospazio) e che $dimKer(A-(1-2i)I_6) = 2$ (e dunque $dimKer(A-(1-2i)I_6)^2 = 3$): dobbiamo dunque scrivere

$$Ker(A-(1-2i)I_6)^2 = Ker(A-(1-2i)I_6) \oplus U_1 = Span(e_1+e_6-ie_5,\ e_2+(i+1)e_5+ie_6) \oplus U_1$$

con U_1 supplementare di dimensione 1. **DA QUI COLLARI HA PERSO LA VOGLIA DI USARE I NUMERI ED È PASSATO ALLE LETTERE; NON HO TERMINATO I CALCOLI PER PIGRIZIA** Scegliendo un $v_1 \in Ker(A-(1-2i)I_6)^2$ tale per cui $v_1 \notin Ker(A-(1-2i)I_6)$, possiamo prendere $U_1 = Span(v_1)$ e così

$$Ker(A-(1-2i)I_6)^2 = Ker(A-(1-2i)I_6) \oplus Span(v_1)$$

Adesso ci basta riscrivere $Ker(A-(1-2i)I_6)$ come somma diretta tra $L_{A-(1-2i)I_6}(Span(v_1))$ e un eventuale supplementare U_2: dato che $dimKer(A-(1-2i)I_6) = 2$ e $dimL_{A-(1-2i)I_6}(Span(v_1)) =$

$dim(Span(L_{A-(1-2i)I_6}(v_1))) = 1$ e dunque $dimU_2 = 1$: si ha così che esisterà un vettore u_1 tale per cui $U_2 = Span(u_1)$. Si ha così che

$$Ker(A - (1-2i)I_6)^2 = Span(L_{A-(1-2i)I_6}(v_1)) \oplus Span(u_1) \oplus Span(v_1)$$

e quindi per questioni teoriche una base di Jordan (complessa) è data da

$$B_{\mathbb{C}} = \{u_1, L_{A-(1-2i)I_6}(v_1), v_1, \overline{u_1}, \overline{L_{A-(1-2i)I_6}(v_1)}, \overline{v_1}\}$$

e quindi, ancora per questioni teoriche, una base di Jordan reale per A è data da

$$B_{\mathbb{R}} = \{\mathfrak{R}(u_1), \mathfrak{I}(u_1), \mathfrak{R}(L_{A-(1-2i)I_6}(v_1)), \mathfrak{I}(L_{A-(1-2i)I_6}(v_1)), \mathfrak{R}(v_1), \mathfrak{I}(v_1)\}$$

20 Esercitazione 28-03-2022

20.1 Esercizio 1

Diciamo che una matrice $S \in S_n(\mathbb{R})$ è definita positiva se e solo se $x^\top \cdot S \cdot x > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Se $N \in GL(n)$, possiamo utilizzarla per costruire una matrice simmetrica definita positiva, infatti $N^\top \cdot N$ è simmetrica e definita positiva, infatti se $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, allora $N \cdot x \neq 0$, in quanto N è iniettiva, e $x^\top \cdot N^\top \cdot N \cdot x = (N \cdot x)^\top \cdot (N \cdot x)$ e quest'ultimo prodotto è la somma dei quadrati delle coordinate di $N \cdot x$.
Sia dunque $M \in M(2n, \mathbb{R})$ e supponiamo che

$$\prod_{i=1}^{n}(M^2 + \alpha_i^2 I_{2n}) = 0$$

con $\alpha_i \neq \alpha_j$ per $i \neq j$. Dimostrare che M si può scrivere come prodotto tra una matrice simmetrica definita positiva e una matrice antisimmetrica, ovvero che $\exists S \in S_{2n}(\mathbb{R})$ definita positiva e $\exists A \in A_{2n}(\mathbb{R})$ tali per cui $M = S \cdot A$.

Dimostrazione. Dato che per ipotesi

$$\prod_{i=1}^{n}(M^2 + \alpha_i^2 I_{2n}) = 0$$

il polinomio

$$P(t) = \prod_{i=1}^{n}(t^2 + \alpha_i^2)$$

è un polinomio che si annulla quando viene valutato in M, ovvero appartiene a $I(M)$: $P(t) \in I(M)$ ed è per questo un multiplo del polinomio minimo. Dato però che $I(M) \subset I(M_\mathbb{C})$, possiamo pensare $P(t)$ come a un polinomio a coefficienti in $\mathbb{C}$ e fattorizzarlo ulteriormente come segue (fattorizzarlo su $\mathbb{C}$):

$$P(t) = \prod_{j=1}^{n}(t + \alpha_j i)(t - \alpha_j i)$$

In particolare, questo polinomio, che contiene tutti fattori irriducibili di grado 1 ed è tale per cui la molteplicità algebrica delle vari radici è uguale a 1, risulta avere grado uguale a quello del polinomio caratteristico di M e dunque è uguale a esso in quanto ha il suo stesso grado e contiene gli stessi fattori irriducibili; per di più, dato che le molteplicità algebriche degli autovalori sono tutte 1, si ha che anche il polinomio minimo di M coincide con $P(t)$, ovvero

$$P(t) = p_M(t) = \mu_M(t)$$

e in particolare $M_\mathbb{C}$ (M vista come matrice complessa) è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ e la sua forma di Jordan complessa è

$$J_\mathbb{C}(M) = \begin{pmatrix} \alpha_1 i & & & & \\ & -\alpha_1 i & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \alpha_n i & \\ & & & & -\alpha_n i \end{pmatrix}$$

Come è fatta la sua forma di Jordan reale? Per quanto visto a teoria essa sarà della forma

$$J_\mathbb{R}(M) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & & & \\ -\alpha_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \alpha_n \\ & & & -\alpha_n & 0 \end{pmatrix} = \overline{A}$$

Notiamo subito che $\overline{A}$ è antisimmetrica: dato che $\overline{A}$ è la forma di Jordan reale di M, queste due matrici sono simili e dunque esiste una matrice $N \in GL(2n, \mathbb{K})$ tale per cui $M = N^{-1} \cdot \overline{A} \cdot N = N^{-1} \cdot (N^\top)^{-1} \cdot N^\top \cdot \overline{A} \cdot N$: in questo prodotto abbiamo che $N^\top \cdot \overline{A} \cdot N$ è antisimmetrica, infatti $(N^\top \cdot \overline{A} \cdot N)^\top = N \cdot (-\overline{A}) \cdot N^\top = -N^\top \cdot \overline{A} \cdot N$, mentre $N^{-1} \cdot (N^\top)^{-1}$ è simmetrica e definita positiva in quanto $N^{-1} \cdot (N^\top)^{-1} = ((N^{-1})^\top)^\top \cdot ((N^\top)^{-1})^\top$ e il resto segue dall'introduzione fatta all'inizio dell'esercizio.

20.2 Esempio di prodotto scalare

Sia $V = \mathbb{R}^n$ e sia $< \cdot, \cdot >_{p,q}$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (con $p + q = n$, $p, q \in \mathbb{N}$) la forma bilineare

$$< x, y >_{p,q} \mapsto \sum_{i=1}^{p} v_i w_i - \sum_{j=p+1}^{n} v_i w_j$$

dove v_i è la i-esima coordinata del vettore v e w_i è la i-esima coordinata del vettore w. La matrice associata a $< \cdot, \cdot >_{p,q}$ nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ è banalmente

$$M_{Can}(< \cdot, \cdot >_{p,q}) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

(dove ci sono p 1 e q -1) in quanto quando applichiamo $< \cdot, \cdot >_{p,q}$ ai vettori $e_i, e_j \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$< e_i, e_j >_{p,q} = \begin{cases} 1 \;\; i = j \leq p \\ -1 \;\; i = j > p \\ 0 \;\; i \neq j \end{cases}$$

Si ha così che $rnk < \cdot, \cdot >_{p,q} = rnk M_{Can}(< \cdot, \cdot >_{p,q}) = n$ e dunque $< \cdot, \cdot >_{p,q}$ è non degenere visto che il suo radicale ha dimensione 0. Per di più $< \cdot, \cdot >_{p,q}$ è un prodotto scalare, visto che invertendo il ruolo di v e w otteniamo solo un rovesciamento nei prodotti, che essendo commutativi in $\mathbb{R}$ non danno problemi.
Notiamo tuttavia che se $1 \leq i \leq p$ e $p < j \leq n$ allora $< e_i + e_j, e_i + e_j >_{p,q} = 0$, infatti $< e_i + e_j, e_i + e_j >_{p,q} = < e_i, e_i >_{p,q} + < e_j, e_i >_{p,q} + < e_i, e_j >_{p,q} + < e_j, e_j >_{p,q} = 1 + 0 - 1 + 0 = 0$ Si ha cosi che il cono isotropo di $< \cdot, \cdot >_{p,q}$ non è $\{0\}$: $CI(< \cdot, \cdot >_{p,q}) \neq \{0\}$ e dunque tale prodotto scalare non è anisotropo.

Il prodotto scalare $< \cdot, \cdot >_{p,q}$ è molto usato in matematica e di solito la coppia $(\mathbb{R}^n, < \cdot, \cdot >_{p,q})$ si denota con $\mathbb{R}^{p,q}$.
Il prodotto scalare classico è un caso particolare di questo prodotto scalare, è quello infatti per cui $p = n$ e $q = 0$: la coppia $(\mathbb{R}^n, < \cdot, \cdot >)$ si denota con $\mathbb{R}^{n,0}$ ed è detto spazio euclideo (lo spazio euclideo è dunque uno spazio vettoriale reale dotato di un prodotto scalare standard): gli spazi succitati $\mathbb{R}^{p,q}$ vengono detti pseudo-euclidei.
Esiste poi un altro spazio molto importante, denotato con $\mathbb{R}^{3,1}$, detto spazio di Minkowski: in questo caso e_1, e_2, e_3 generano un sottospazio dove $< \cdot, \cdot >_{3,1}$ è definito positivo (ovvero $\forall v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ $< v, v >_{3,1} > 0$) mentre e_4 genera una retta dove $< \cdot, \cdot >_{3,1}$ è definito negativo (ovvero $\forall v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ $< v, v >_{3,1} < 0$); il cono isotropo $CI(< \cdot, \cdot >_{p,q}))$ è detto cono luce.
Pensando tale spazio come spazio metrico, la metrica $< \cdot, \cdot >_{3,1}$ (e più in generale la metrica $< \cdot, \cdot >_{n,1}$) è detta metrica lorentziana.

20.3 Altro esempio di prodotto scalare

Sia $V = C([0, 1])$ l'$\mathbb{R}$-spazio delle funzioni continue sull'intervallo $[0, 1]$. Sia $\omega \in V$ tale che $\omega > 0$ su tutto l'intervallo. Definiamo la forma bilineare

$$< f, g >_\omega = \int_0^1 f(x)g(x)\omega(x)\, dx$$

(Questa scrittura ha senso in quanto il prodotto di funzioni continue è una funzione continua e ogni funzione continua è integrabile).
Notiamo subito che $< \cdot, \cdot >_\omega$ è definito positivo in quanto

· se $f > 0$, allora $\int f\, dx > 0$ (dato che f è continua e positiva su un compatto e quindi ha un minimo x_0 tale che $f(x_0) > 0$ e quindi $\int f\, dx \geq \int x_0\, dx > 0$)

· se $f \geq 0$ e $f \neq 0$ (non è la funzione nulla) allora $\int f\, dx > 0$: infatti se $f \geq 0$ ma f

non nulla, allora esiste $x_0 \in [0,1]$ tale che $f(x_0) > 0$ e quindi, per continuità, esiste un intervallo $[x_0-\epsilon, x_0+\epsilon]$ tale per cui $f_{|[x_0-\epsilon,x_0+\epsilon]} > 0$. Si ha così che

$$\int_0^1 f\,dx = \int_0^{x_0-\epsilon} f\,dx + \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} f\,dx + \int_{x_0+\epsilon}^1 f\,dx$$

e $\int_0^{x_0-\epsilon} f\,dx \geq 0$, $\int_{x_0+\epsilon}^1 f\,dx \geq 0$ e $\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} f\,dx > 0$ e dunque la somma è > 0.

Si ha allora che

$$< f, f >_\omega = \int_0^1 f^2(x)\omega(x)\,dx \geq 0$$

e in particolare si ha uguaglianza se e solo se $f^2(x)\omega(x) = 0$, ovvero se e solo se $f(x) = 0$ (in quanto $\omega(x) > 0$ per ipotesi). Si ha così che quanto definito sopra è un prodotto scalare definito positivo.

20.4 Altro esempio di prodotto scalare

Sia $V = \mathfrak{Sl}_n = \{M \in M(n,\mathbb{R})\,|\,tr(M) = 0\}$ lo spazio delle matrici a traccia nulla (N.B. $dim\mathfrak{Sl}_n = n^2-1$ in quanto banalmente $\mathfrak{Sl}_n = Ker(tr)$ e per la formula delle dimensioni di nucleo e immagine si ha che $dimIm(tr) + dimKer(tr) = 1 + dim\mathfrak{Sl}_n = n^2$, in quanto $tr : M(n,\mathbb{K}) \in \mathbb{K}$ è surgettiva e la sua immagine ha dimensione 1: si ha quindi che $dim\mathfrak{Sl}_n = n^2-1$). Definiamo $K_n(A,B)$ come $K_n(A,B) = 2ntr(A\cdot B)$ (forma di Killing). Verifichiamo che quest'applicazione è un prodotto scalare:

· additività sul primo argomento: $K_n(A_1+A_2,B) = 2ntr((A_1+A_2)\cdot B) = 2ntr(A_1\cdot B + A_2\cdot B) = 2ntr(A_1\cdot B) + 2ntr(A_2\cdot B) = K_n(A_1,B) + K_n(A_2,B)$.

· additività sul secondo argomento: $K_n(A,B_1+B_2) = 2ntr(A\cdot(B_1+B_2)) = 2ntr(A\cdot B_1 + A\cdot B_2) = 2ntr(A\cdot B_1) + 2ntr(A\cdot B_2) = K_n(A,B_1) + K_n(A,B_2)$.

· omogeneità: $K_n(\lambda A,B) = K_n(A,\lambda B) = 2ntr(\lambda A\cdot B) = 2\lambda ntr(A\cdot B) = \lambda K_n(A,B)$.

· trasposizione: $K_n(A,B)^\top = K_n(B,A) = 2ntr(B\cdot A)$ e per quanto visto nell'Esercizio 4 dell'esercitazione 12-11-2021 si ha che $2ntr(B\cdot A) = 2ntr(A\cdot B) = K_n(A,B)$.

Cerchiamo di trovare la matrice associata a K_2 su $\mathfrak{Sl}_2$: un qualsiasi elemento appartenente a $\mathfrak{Sl}_2$ è del tipo

$$\begin{pmatrix} a & * \\ * & -a \end{pmatrix}$$

con $a \in \mathbb{R}$ e dato che $dim\mathfrak{Sl}_2 = 2^2-1 = 3$, una base naturale di $\mathfrak{Sl}_2$ è data da

$$B = \left\{ h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Troviamo allora ogni entrata della matrice associata a K_2 nella base B:

elemento di posto 1,1: $K_2\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Big) = 2{\cdot}2tr\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Big) = 2{\cdot}2{\cdot}2 = 8$

elemento di posto 1,2: $K_2\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Big) = 2{\cdot}2tr\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Big) = 2{\cdot}2{\cdot}0 = 0$

elemento di posto 1,3: $K_2\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Big) = 2{\cdot}2tr\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Big) = 2{\cdot}2{\cdot}0 = 0$

elemento di posto 2,1=elemento di posto 1,2 in quanto prodotto scalare $K_2\Big(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Big) = 0$

elemento di posto 2,2: $K_2\Big(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Big) = 2\cdot 2tr\Big(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Big) = 2\cdot 2\cdot 0 = 0$

elemento di posto 2,3: $K_2\Big(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Big) = 2\cdot 2tr\Big(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Big) = 2\cdot 2\cdot 1 = 4$

elemento di posto 3,1=elemento di posto 1,3 in quanto prodotto scalare $K_2\Big(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Big) = 0$

elemento di posto 3,2=elemento di posto 2,3 in quanto prodotto scalare $K_2\Big(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Big) = 4$

elemento di posto 3,3: $K_2\Big(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Big) = 2\cdot 2tr\Big(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Big) = 2\cdot 2\cdot 0 = 0$

Si ha così che la matrice associata al prodotto scalare K_2 nella base B è del tipo

$$M_B(K_2) = \begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

Notiamo che tale matrice è simmetrica. Per di più $rnkM_B(K_2) = 3$ e dunque K_2 è non degenere. Abbiamo quindi trovato un prodotto scalare non degenere sullo spazio delle matrici 2×2. Tale prodotto scalare non è né definito positivo, né definito negativo, infatti se

$$X = \begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix} \in \mathfrak{Sl}_2$$

$$K_2(X,X) = [X]_B^\top \cdot M_B(K_2)\cdot [X]_B = (a\ \ b\ \ c)\begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} = 8a^2 + 4bc$$

che al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$ non ha un segno fisso (basta verificare che $a = 2, b = 2, c = 2$ danno un risultato positivo e $a = 2, b = 2, c = -10$ danno un risultato negativo).
Tale prodotto scalare non è neanche semi-definito positivo/negativo: una forma bilineare ϕ si dice semi-definita positiva se

$$\phi(v,v) \geq 0 \quad \forall v \in V$$

(rispettivamente semi-definita negativa con ≤ 0).

20.5 Nota sulle isometrie

Abbiamo visto a lezione che un'isometria è un isomorfismo di spazi vettoriali che preserva i prodotti scalari, ovvero se (V,ϕ) e (W,ψ) sono spazi vettoriali muniti di prodotto scalare allora $f : V \longrightarrow W$ è un'isometria se e solo se f è un isomorfismo e $\phi(v_1, v_2) = \psi(f(v_1), f(v_2))$ $\forall v_1, v_2 \in V$.
Vogliamo far vedere che se $dimV = dimW$ e ϕ è un prodotto scalare definito positivo (o anche negativo), allora basta che $\phi(v_1, v_2) = \psi(f(v_1), f(v_2))$ affinché f sia un'isometria (ovvero il fatto che f sia un isomorfismo discende dalle ipotesi). Difatti se $dimV = dimW$ allora f è un isomorfismo $\iff$ f è iniettiva. Sia ora $0 \neq v \in V$: dato che ϕ è definito positivo si ha che $0 < \phi(v,v) = \psi(f(v), f(v)) \longrightarrow f(v) \neq 0$ (altrimenti $\psi(f(v), f(v)) = \psi(0,0) = 0$) $\Longrightarrow$ f è iniettiva (Nel caso in cui ϕ sia definito negativo la dimostrazione è la stessa).

20.6 Esercizio 1

Dimostrare che ($\mathfrak{Sl}_2$,K_2) è isometrico a $\mathbb{R}^{2,1}$.

Dimostrazione. Da quanto visto nelle note precedenti K_2 è un prodotto scalare tale che $K_2(X,X) = 8a^2 + 4bc$ dove

$$X = \begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}$$

e in particolare avevamo calcolato esplicitamente $K_2(h,h) = 8$, $K_2(x,x) = 0$ e $K_2(y,y) = 0$ dove h, x e y sono gli elementi della base B di sopra. Notiamo ora che

$$K_2(x \pm y, x \pm y) = K_2(x,x) \pm 2K_2(x,y) \pm K_2(y,y) = 0 \pm 8 \pm 0 = \pm 8$$

in quanto $K_2(x,y) = 4$ è l'elemento di posto $2,3$ della matrice $M_B(K_2)$ scritta sopra. Si ha allora che l'insieme

$$B' = \{h, x+y, x-y\} = \Big\{h = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, x+y = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, x-y = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\Big\}$$

è una base di $\mathfrak{Sl}_2$ (in quanto $\{h, x, y\}$ sono una base di $\mathfrak{Sl}_2$ e quindi se sostituiamo a uno dei 3 elementi una combinazione lineare dei 3, continuiamo ad avere una base). Sia allora $M_{B'}(K_2)$ la nuova matrice associata a K_2 nella base B': come è fatta questa matrice? Dato che abbiamo calcolato esplicitamente $K_2(x \pm y, x \pm y)$ (e dato che per la nota precedente conosciamo ogni combinazione di K_2 con le 3 matrici) si ha che

$$M_{B'}(K_2) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

che è una matrice diagonale. Se allora chiamiamo

$$b_1 = \frac{h}{\sqrt{8}}, \quad b_2 = \frac{x+y}{\sqrt{8}}, \quad b_3 = \frac{x-y}{\sqrt{8}}$$

possiamo costruire un isomorfismo tra $\mathfrak{Sl}_2$ e $\mathbb{R}^3$ che manda l'insieme $\{b_1, b_2, b_3\}$ (che è ancora una base) in una base di $\mathbb{R}^3$ e che sia un isometria, ovvero che conserva i prodotti scalari: definiamo ad esempio

$$f : \mathfrak{Sl}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

nel modo seguente:

$$f(b_1) = e_1, \quad f(b_2) = e_2, \quad f(b_3) = e_3$$

Ovviamente f è un isomorfismo in quanto manda basi in basi. Mostriamo che è anche un'isometria:

$$< f(b_i), f(b_j) >_{2,1} = < e_i, e_j >_{2,1} = \begin{cases} 1 & i = j = 1, 2 \\ -1 & i = j = 3 \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$K_2(b_i, b_j) = \begin{cases} 1 & i = j = 1, 2 \\ -1 & i = j = 3 \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

N.B. Sappiamo che $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, da cui banalmente $\mathfrak{Sl}_2(\mathbb{Q}) \subset \mathfrak{Sl}_2(\mathbb{R})$ e $K_2^{\mathbb{Q}} = K^{\mathbb{R}}_{2\,|_{\mathfrak{Sl}_2(\mathbb{Q})}}$, consideriamo lo spazio dotato di prodotto scalare $\mathbb{Q}^{2,1} = (\mathbb{Q}^3, < \cdot, \cdot >_{2,1})$, dove

$$< \cdot, \cdot >^{\mathbb{Q}}_{2,1} = < \cdot, \cdot >^{\mathbb{R}}_{2,1_{|\mathbb{Q}}}$$

. Si ha tuttavia che $\mathfrak{Sl}_2(\mathbb{Q})$ non è isometrico a $\mathbb{Q}^{2,1}$, questo perché $\sqrt{8} \notin \mathbb{Q}$ e dunque non possiamo "scalare la base" come abbiamo fatto di sopra per rendere uguali i risultati.

20.7 Interpretazione del cono isotropo

Consideriamo $\mathbb{R}^{2,1}$. Il cono isotropo del prodotto scalare $< \cdot, \cdot >_{2,1}$ è

$$CI(< \cdot, \cdot >_{2,1}) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, < \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} >_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

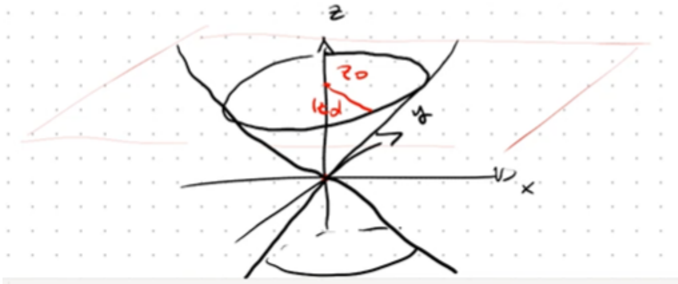
Si ha però che per definizione

$$< \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} >_{2,1} = x \cdot x + y \cdot y - z \cdot z = x^2 + y^2 - z^2$$

Si ha allora che

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in CI(< \cdot, \cdot >_{2,1}) \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = z^2$$

Ci chiediamo allora come è fatto questo oggetto: posizionandoci nello spazio si ha che, con il variare arbitrario del parametri z (quindi cambiando quota) l'equazione rappresenta una circonferenza centrata in (0,0,z) e di raggio z giacente nel piano affine parallelo a xy: quando $z = 0$ la circonferenza degenera in un punto, se $z > 0$ si viene a creare invece un cono come nella figura di sotto (lo stesso se $z < 0$)



Ecco dunque svelato il mistero per cui tale insieme si chiama Cono isotropo :).
Analizzando i coni isotropi in $\mathbb{R}^{n,1}$ otteniamo lo stesso risultato: la condizione di appartenenza è

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = x_{n+1}^2$$

e ogni volta che tagliamo il cono isotropo con un iperpiano di $\mathbb{R}^{n+1}$ (ovvero con un sottospazio di dimensione n) otteniamo delle sfere n-dimensionali.

20.8 Esercizio 2

Sia $\phi : \mathbb{K}[x] \times \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}$ un'applicazione e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Assumiamo $char\mathbb{K} \neq 2$ e definiamo ϕ come segue:

$$\phi(p, q) = p(\alpha)q(\beta)$$

Si dimostri che ϕ è una forma bilineare e si determini la matrice associata a $\phi_{|_{\mathbb{K}_2[x]}}$ (polinomio di grado minore o uguale a 2) nella base canonica $Can = \{1, x, x^2\}$. Si determinino successivamente $Rad_d(\phi_{|_{\mathbb{K}_2[x]}}), Rad_s(\phi_{|_{\mathbb{K}_2[x]}})$ e $rnk(\phi_{|_{\mathbb{K}_2[x]}})$.

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che ϕ è un prodotto scalare: mostriamo che è additiva su entrambi gli argomenti, omogenea e che coincide con la sua trasposta:

· additiva sul primo argomento: $\phi(p_1 + p_2, q) = (p_1 + p_2)(\alpha)q(\beta) = p_1(\alpha)q(\beta) + p_2(\alpha)q(\beta) = \phi(p_1, q) + \phi(p_2, q)$.

· additiva sul secondo argomento: $\phi(p, q_1 + q_2) = p(\alpha)(q_1 + q_2)(\beta) = p(\alpha)q_1(\beta) + p(\alpha)q_2(\beta) = \phi(p, q_1) + \phi(p, q_2)$.

· omogenea: $\phi(\lambda p, q) = (\lambda p)(\alpha)q(\beta) = \lambda p(\alpha)q(\beta) = \lambda\phi(p, q)$.

Costruiamo ora la matrice associata a $\phi_{|_{\mathbb{K}_2[x]}}$ nella base Canonica di sopra:

elemento di posto 1,1: $\phi(1, 1) = 1 \cdot 1 = 1$

elemento di posto 1,2: $\phi(1, x) = 1 \cdot \beta = \beta$

elemento di posto 1,3: $\phi(1, x^2) = 1 \cdot (\beta)^2 = \beta^2$

elemento di posto 2,1: $\phi(x, 1) = \alpha \cdot 1 = \alpha$

elemento di posto 2,2: $\phi(x, x) = \alpha \cdot \beta = \alpha\beta$

elemento di posto 2,3: $\phi(x, x^2) = \alpha \cdot (\beta)^2 = \alpha\beta^2$

elemento di posto 3,1: $\phi(x^2, 1) = (\alpha)^2 \cdot 1 = \alpha^2$

elemento di posto 3,2: $\phi(x^2, x) = (\alpha)^2 \cdot \beta = \alpha^2\beta$

elemento di posto 3,3: $\phi(x^2, x^2) = (\alpha)^2 \cdot (\beta)^2 = \alpha^2\beta^2$

Possiamo così scrivere facilmente la matrice associata a $\phi_{|_{\mathbb{K}_2[x]}}$ nella base scelta:

$$M_B(\phi_{|_{\mathbb{K}_2[x]}}) = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \beta^2 \\ \alpha & \alpha\beta & \alpha\beta^2 \\ \alpha^2 & \alpha^2\beta & \alpha\beta \end{pmatrix}$$

Notiamo subito che la terza colonna è β^2 volte la prima e la seconda colonna è β volte la prima: dato che la prima colonna non è mai nulla (grazie all'1 in posizione 1,1) si ha che

$rnk(M_B(\phi_{|_{\mathbb{K}_2[x]}})) = 1$, ovvero $\phi_{|_{\mathbb{K}_2[x]}}$ è degenere per ogni scelta di $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Si è visto inoltre che $C^3 - \beta^2 C^1 = 0$ e $C^2 - \beta C^1 = 0$ e dunque l'elemento $\beta - x$ e l'elemento $\beta^2 - x^2$ (che sono linearmente indipendenti per ogni scelta di β) generano il radicale destro di $\phi_{|_{\mathbb{K}_2[x]}}$, ovvero il $Rad_d(\phi_{|_{\mathbb{K}_2[x]}}) = Span(\beta - x, \beta^2 - x^2)$ (in soldoni significa che fissato un qualsiasi $p \in \mathbb{K}[t]$ l'applicazione $\phi_{|_{\mathbb{K}_2[x]}}(p, \beta - x) = \phi_{|_{\mathbb{K}_2[x]}}(p, \beta^2 - x^2) = 0)$. Per quanto visto a teoria inoltre si ha che il radicale sinistro corrisponde a $KerM_B(\phi_{|_{\mathbb{K}_2[x]}})^\top$: studiamo dunque la matrice

$$M_B(\phi_{|_{\mathbb{K}_2[x]}})^\top = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \beta & \alpha\beta & \beta\alpha^2 \\ \beta^2 & \beta^2\alpha & \alpha\beta \end{pmatrix}$$

sappiamo che il rango di una matrice e della sua trasposta coincidono e quindi anche $rnkM_B(\phi_{|_{\mathbb{K}_2[x]}})^\top = 1$ e dato che anche in questo caso si ha che $C^3 - \beta^2 C^1 = 0$ e $C^2 - \beta C^1 = 0$ si ha che i polinomi $\alpha - x$ e $\alpha^2 - x^2$ generano $KerM_B(\phi_{|_{\mathbb{K}_2[x]}})^\top$ ovvero $R_s(\phi_{|_{\mathbb{K}_2[x]}}) = Span(\alpha - x, \alpha^2 - x^2)$.

21 Esercitazione 04-04-2022

21.1 Esercizio 1

Sia $\phi \in PS(\mathbb{R}^3)$ un prodotto scalare definito dalla matrice

$$M_{Can}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

i) Dimostrare che ϕ è non degenere e che $CI(\phi)$ contiene un sottospazio di dimensione 1, ma nessun sottospazio di dimensione 2.

ii) Dimostrare che esistono $U, W \subset \mathbb{R}^3$, entrambi di dimensione 2, tali per cui $\phi_{|_U}$ è non degenere, $\phi_{|_W}$ è degenere e $U \cap W \subset CI(\phi)$.

Dimostrazione. *i*) Per dimostrare che ϕ è non degenere basta mostrare che la matrice $M_{Can}(\phi)$ ha rango massimo: basta dunque far vedere che il suo determinante è diverso da 0:

$$detM_{Can}(\phi) = det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -1-4 = -5$$

Si ha quindi che $det(\phi) \neq 0$ ovvero che $Rad(\phi) = \{0\}$.
Determiniamo ora $CI(\phi)$: per definizione

$$CI(\phi) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x \;\; y \;\; z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x(x-y) + y(-x+2y+2z) + z(2y-z) = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy + 4zy = 0 \right\}$$

Per mostrare che $CI(\phi)$ contiene un sottospazio di dimensione 1, ci basta trovare un vettore $v_0 \in CI(\phi)$ non nullo, infatti da ciò seguirà che $Span(v_0) \subset CI(\phi)$. Per farlo, possiamo intersecare il cono isotropo con un qualsiasi iperpiano (è l'oggetto più grande che possiamo scegliere) di $\mathbb{R}^3$ (attenzione: non è detto che l'intersezione sia non banale; inoltre non è detto che se l'intersezione è banale allora il cono isotropo non contiene vettori isotropi diversi da 0), per esempio con

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y = 0 \right\}$$

ottenendo

$$CI(\phi) \cap A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 - z^2 = 0 \right\}$$

Tale intersezione rappresenta l'unione di due insiemi diversi, quello generato dal vettore $e_1 + e_3$ e quello generato dal vettore $e_1 - e_3$ ovvero

$$CI(\phi) \cap A = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \cup Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})$$

Abbiamo allora trovato un sottospazio (in realtà ne abbiamo trovati 2) di dimensione 1 contenuto in $CI(\phi)$. Facciamo vedere che invece non esiste un sottospazio di dimensione 2: assumiamo per assurdo che esista $W \subset \mathbb{R}^3$ con $dimW = 2$ e tale per cui $W \subset CI(\phi)$ e fissiamo una sua base $B = \{w_1, w_2\}$. Vogliamo allora determinare $M_B(\phi_{|_W})$ (che è una matrice di taglia 2×2): dato che $W \subset CI(\phi)$, si sa che $\phi(w_1, w_1) = 0$ e $\phi(w_2, w_2) = 0$ ovvero che le entrate nelle posizioni 1,1 e 2,2 sono degli zeri; inoltre, dato che W è un sottospazio, $w_1 + w_2 \in W$ e quindi $w_1 + w_2 \in CI(\phi)$, ovvero $\phi(w_1 + w_2, w_1 + w_2) = 0$, ma esplicitando a sinistra otteniamo $\phi(w_1 + w_2, w_1 + w_2) = \phi(w_1, w_1) + 2\phi(w_1, w_2) + \phi(w_2, w_2) = 2\phi(w_1, w_2)$ e per transitività $2\phi(w_1, w_2) = 0$ e dato che $\mathbb{R}$ è un campo tale per cui $char\mathbb{R} \neq 2$ si deve avere necessariamente $\phi(w_1, w_2) = 0$ e quindi anche le entrate 1,2 e 2,1 sono nulle:

$$M_B(\phi_{|W}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ovvero la matrice associata al prodotto scalare $\phi_{|W}$ nella base B è nulla e dunque $\phi_{|W} = 0$ (è la forma bilineare nulla).
Completiamo ora B a una base di $\mathbb{R}^3$: sia $D = B \cup \{v\} = \{w_1, w_2, v\}$ e determiniamo la matrice $M_D(\phi)$: essa avrà la forma seguente:

$$M_D(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \phi(w_1, v) \\ 0 & 0 & \phi(w_2, v) \\ \phi(v, w_1) & \phi(v, w_2) & \phi(v, v) \end{pmatrix}$$

Si ha allora che le prime due colonne sono linearmente dipendenti, in quanto differiscono soltanto di una costante moltiplicativa, e ciò è assurdo in quanto $dimM_D(\phi) < 3$ e dunque $dimRad(\phi) \neq 0$, ovvero ϕ sarebbe degenere, in contraddizione a quanto dimostrato in precedenza.

ii) Notiamo subito che $dim(U \cap W) \geq 1$, infatti per Grassmann

$$dim(U + W) = dimU + dimW - dim(U \cap W) = 4 - dim(U \cap W)$$

e poiché $dim(U + W) \leq 3$ si ha $4 - dim(U \cap W) \leq 3$, ovvero $dim(U \cap W) \geq 1$. Inoltre, per quanto detto nel punto *i*), non può essere $dim(U \cap W) = 2$, in quanto per ipotesi $U \cap W \subset CI(V) \implies dim(U \cap W) = 1$. Dal punto *i*) ad esempio sappiamo che

$$Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \subset CI(\phi)$$

Se quindi definiamo U e W come

$$W = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w) \quad U = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u)$$

otteniamo che effettivamente $U \cap W \subset CI(\phi)$ e che $dimU = dimW = 2$: ci basta dunque dare delle condizioni su u e su w per far sì che le 2 ipotesi su $\phi_{|W}$ e su $\phi_{|U}$ vengano rispettate.
Costruiamo allora le matrici associate a $\phi_{|W}$ e a $\phi_{|U}$ (considerando gli *Span* di sopra come basi):

$$M(\phi_{|W}) = \begin{pmatrix} 0 & \phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w) \\ \phi(w, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) & \phi(w, w) \end{pmatrix}$$

dato che vogliamo un prodotto scalare degenere su W, questa matrice deve avere rango minore di 2. Siccome

$$detM(\phi_{|W}) = det \begin{pmatrix} 0 & \phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w) \\ \phi(w, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) & \phi(w, w) \end{pmatrix} = -[\phi(w, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})]^2$$

affinché $rnk(M(\phi_{|W})) < 2$ si deve avere $detM(\phi_{|W}) = 0$, ovvero $-[\phi(w, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})]^2 = 0$, ovvero $\phi(w, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = 0$: dobbiamo cercare un vettore $w \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e che non stia nel cono isotropo (se

$w \in CI(\phi)$, allora si avrebbe $W \subset CI(\phi)$ che è assurdo). Imponiamo allora l'equazione di ortogonalità:

$$\phi(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, w) = 0 \Longrightarrow (1\ \ 0\ \ 1) \cdot \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$x - y - z + 2y = x + y - z = 0$$

ovvero tutti i vettori ortogonali al vettore $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ rispettano quell'equazione. Dobbiamo ora trovare un vettore che rispetti l'equazione $x + y - z = 0$ e che non stia nel cono isotropo. Per farlo ci basta intersecare lo spazio $\{x + y - z = 0,\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$ (che è un iperpiano) con l'insieme $\{x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy + 4zy \neq 0,\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$ (che è l'equazione di non appartenenza al cono isotropo): in particolare otteniamo dalla prima $z = x + y$ e dalla seconda $x^2 + 2y^2 - x^2 - y^2 + 2xy - 2xy + 4xy + 4y^2 \neq 0$ ovvero $y(5y + 4x) \neq 0$. Ci basta dunque scegliere un vettore che rispetti queste due condizioni per essere sicuri che esso sia ortogonale a $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ e non appartenente al cono isotropo. Un esempio è il vettore

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

Infatti $2 = z = x + y = 1 + 1$ e $1(5 + 4) = 9 \neq 0$. Si ha così che il sottospazio

$$W = Span(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix})$$

è un sottospazio di dimensione 2 e tale per cui $\phi_{|W}$ è degenere.
Costruiamo ora la matrice associata a $\phi_{|U}$ nella base definita dallo *Span* di sopra:

$$M(\phi_{|U}) = \begin{pmatrix} 0 & \phi(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, u) \\ \phi(u, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}) & \phi(u, u) \end{pmatrix}$$

dato che vogliamo un prodotto scalare non degenere su U, questa matrice deve avere rango massimo, ovvero uguale a 2. Ci basta dunque imporre che il determinante della matrice associata sia $\neq 0$:

$$det M(\phi_{|U}) = det \begin{pmatrix} 0 & \phi(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, u) \\ \phi(u, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}) & \phi(u, u) \end{pmatrix} = -[\phi(u, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix})]^2$$

e tale determinante è $\neq 0$ se e solo se $\phi(u, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}) \neq 0$, ovvero se e solo se u non è ortogonale a $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ (visto che avevamo prima imposto la condizione di ortogonalità, ci basta non rispettarla): si ha quindi che un qualsiasi vettore tale per cui $z \neq x + y$ e tale per cui $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy + 4zy \neq 0$ può essere scelto per generare U: prendiamo per esempio il vettore

$$\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

che rispetta le condizioni in quanto $2 \neq 0+1$ e $0+2-4-0+8 = 6 \neq 0$. Abbiamo così esplicitamente trovato due sottospazi di dimensione 2 tali per cui valgono le ipotesi di sopra, essi sono:

$$W = Span(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}) \quad U = Span(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix})$$

Osservazione: Il discorso fatto nel punto i) per dimostrare la non esistenza di un sottospazio di dimensione 2 può essere generalizzato con la proposizione seguente:

Proposizione: Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale (con $char\mathbb{K} \neq 2$) di dimensione finita n e sia $\phi \in PS(V)$. Valgono le seguenti implicazioni:
i) $W \subset CI(\phi)$ sottospazio vettoriale $\implies \phi_{|W} \equiv 0$.
ii) $dimW > \frac{n}{2} \implies \phi$ è degenere.

Dimostrazione. i) Sia $B = \{w_1, ..., w_k\}$ una base di W. Dato che $W \subset CI(\phi)$, $\phi(w_i, w_i) = 0$ $\forall i \in \{1, ..., k\}$, la matrice $M_B(\phi_{|W})$ ha tutti zeri sulla diagonale. Vogliamo allora determinare $\phi(w_i, w_j)$: si sa che $w_i + w_j \in W \subset CI(\phi)$ e dunque $\phi(w_i + w_j, w_i + w_j) = 0$, ovvero $\phi(w_i, w_i) + 2\phi(w_i, w_j) + \phi(w_j, w_j) = 0$, ovvero $2\phi(w_i, w_j) = 0$ e dato che per ipotesi $char\mathbb{K} \neq 2$, si ha che $\phi(w_i, w_j) = 0$, ovvero che ogni entrata della matrice $M_B(\phi_{|W})$ è nulla e dunque $M_B(\phi_{|W}) = 0$, che implica $\phi_{|W} \equiv 0$.

ii) Completando la base B del punto i) a base di V otteniamo $D = B \cup \{v_1, ..., v_{n-k}\}$ (notiamo che $n-k < k$ per ipotesi) e si trova che la matrice

$$M_D(\phi) = \begin{pmatrix} M_B(\phi_{|W}) & A \\ C & F \end{pmatrix}$$

dove con $A \in M(k, n-k, \mathbb{K})$, $C \in M(n-k, k, \mathbb{K})$ e $F \in M(n-k, \mathbb{K})$. Sappiamo tuttavia che $M_B(\phi_{|W}) = 0$ e dunque

$$M_D(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & A \\ C & F \end{pmatrix}$$

da cui segue che le prime k colonne di $M_D(\phi)$ sono per forza linearmente dipendenti in quanto $k > n-k$ e quindi la sottomatrice C ha rango al massimo $n-k$ (tutto questo per dire che tra le k colonne di C ce ne devono essere alcune linearmente dipendenti dalle altre). Scoperto questo, si ha che $rnk(\phi)$ non è massimo, ovvero che $dimRad(\phi) \neq 0$, che equivale a dire che ϕ è degenere.

21.2 Esercizio 2

Sia $\mathbb{R}_3[x] \subset \mathbb{R}[x] \subset C([-1,1])$ l'insieme dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$, contenuti nello spazio delle funzioni continue tra -1 e 1 (compresi). Nella scorsa esercitazione avevamo definito un prodotto scalare su $C([0,1])$, che si può estendere anche a $C([-1,1])$: sia $C([-1,1]) \ni \omega > 0$ una funzione continua in $[-1,1]$ e positiva su tutto l'intervallo. Definiamo

$$\phi_\omega(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\omega(x)\, dx$$

che è un prodotto scalare definito positivo (notare che definendo le funzioni continue su un qualsiasi compatto connesso di $\mathbb{R}$ non cambia le cose). Restringiamo ora il prodotto scalare al sottospazio $\mathbb{R}_3[x]$ (se V è munito di un prodotto scalare ϕ, allora $W \subset V$ sottospazio è munito di prodotto scalare ϕ_W): dobbiamo cercare famiglie di polinomi ortogonali di grado minore uguale di 3 rispetto al prodotto scalare di sopra. Sia allora $\omega = 1$ (funzione continua in $[-1,1]$ e positiva): cerchiamo i polinomi di grado minore uguale di 3 tali per cui

$$\phi_1(p, q) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\, dx = 0$$

(questi polinomi si chiamano **polinomi di Legendre**).
Fissiamo la base canonica di $\mathbb{R}_3[x]$ $B = \{1, x, x^2, x^3\}$: vogliamo ricavarne una base ortogonale. Notiamo che

$$\phi_1(x^i, x^j) = \int_{-1}^{1} x^{i+j}\, dx = \frac{x^{i+j+1}}{i+j+1}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1-(-1)^{i+j+1}}{i+j+1}$$

In particolare si ha che

$$\phi_1(1,1) = 2,\;\; \phi_1(1,x) = 0,\;\; \phi_1(1,x^2) = \frac{2}{3},\;\; \phi_1(1,x^3) = 0,\;\; \phi_1(x,x) = \frac{2}{3}$$

$$\phi_1(x,x^2) = 0,\;\; \phi_1(x,x^3) = \frac{2}{5},\;\; \phi_1(x^2,x^2) = \frac{2}{5}\;\; \phi_1(x^2,x^3) = 0,\;\; \phi_1(x^3,x^3) = \frac{2}{7}$$

Scriviamo allora la matrice associata a ϕ_1 nella base canonica B:

$$M_B(\phi_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Determiniamo ora una base ortogonale di V rispetto a ϕ_1, che esiste per il teorema di esistenza delle basi ortogonali: utilizzeremo l'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Sia allora 1 il primo vettore della base B, notiamo che 1 non è isotropo rispetto a ϕ, in quanto $\phi_1(1,1) = 2$, e quindi può essere preso come primo vettore della base ortogonale B^0. Costruiamo dunque gli altri vettori tramite il primo passo di Gram-Schmidt: si avrà la base $B^1 = \{1, x - c(x,1)1, x^2 - c(x^2,1)1, x^3 - c(x^3,1)1\}$ dove ricordiamo che $c(v,v_0) = \frac{\phi_1(v,v_0)}{\phi_1(v_0,v_0)}$. Calcoliamo esplicitamente tutti i coefficienti e quindi tutti i vettori della nuova base:

$$c(x,1) = \frac{\phi_1(x,1)}{\phi_1(1,1)} = 0$$

$$c(x^2,1) = \frac{\phi_1(x^2,1)}{\phi_1(1,1)} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

$$c(x^3,1) = \frac{\phi_1(x^3,1)}{\phi_1(1,1)} = 0$$

Abbiamo dunque che questa nuova base è del tipo

$$B^1 = \{1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3\}$$

ed è tale per cui ogni elemento è ortogonale a 1. Per cautela mostriamo che ciò è vero empiricamente:

$$\phi_1(1,x) = 0, \quad \phi_1(1,x^3) = 0,$$

$$\phi_1(1,x^2) = \int_{-1}^{1} x^2 - \frac{1}{3}\,dx = \int_{-1}^{1} x^2\,dx - \int_{-1}^{1}\frac{1}{3}\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{3}x\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} - 2\frac{1}{3} = 0$$

Notiamo che tale base tuttavia non è ortogonale, in quanto ad esempio $\phi_1(x,x^3) = \frac{2}{5}$ (non sono cambiati loro). Continuiamo dunque con l'algoritmo di ortogonalizzazione: consideriamo una base costituita da $1, x$ come primi due elementi. Troviamo gli altri due con l'algoritmo di ortogonalizzazione: $B^2 = \{1, x, x^2 - \frac{1}{3} - c(x^2 - \frac{1}{3}, x)x, x^3 - c(x^3,x)x\}$: troviamo i coefficienti:

$$c(x^2 - \frac{1}{3}, x) = \frac{\phi_1(x^2 - \frac{1}{3}, x)}{\phi_1(x,x)} = \frac{\phi_1(x^2,x)}{\phi_1(x,x)} - \frac{\frac{1}{3}\phi_1(1,x)}{\phi_1(x,x)} = 0 - 0 = 0$$

$$c(x^3,x) = \frac{\phi_1(x^3,x)}{\phi_1(x,x)} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$$

e quindi si ha che la base B^2 è fatta come segue:

$$B^2 = \{1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5}x\}$$

Ci chiediamo se questa base è ortogonale: ci basta calcolare

$$\phi_1(x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5}x) = \phi_1(x^2, x^3 - \frac{3}{5}x) - \frac{1}{3}\phi_1(1, x^3 - \frac{3}{5}x) =$$

$$= \phi_1(x^2,x^3) - \frac{3}{5}\phi_1(x^2,x) - \frac{1}{3}\phi_1(1,x^3) + \frac{1}{5}\phi_1(1,x) = 0$$

e quindi si ha che effettivamente $B^2 = B^0 = \{1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5}x\}$ è una base ortogonale di $(\mathbb{R}_3[x], <\cdot,\cdot>_\omega)$ e ciò conclude la ricerca di polinomi ortogonali di grado minore uguale di 3, in quanto ogni combinazione lineare di elementi della base B^0 è ortogonale rispetto agli altri.

22 Esercitazione 08-04-2022

22.1 Esercizio 1

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano $U, W \subset V$ sottospazi vettoriali tali che $U \perp W$ per un certo prodotto scalare $\phi \in PS(V)$; supponiamo che $V = U + W$ (non somma diretta). Dimostrare che:
i) $Rad(\phi) = Rad(\phi_{|_U}) + Rad(\phi_{|_W})$
ii) Se $S \subset W \implies S^\perp = (S^\perp \cap W) + U$.
iii) Se ϕ è non degenere allora $U = W^\perp$ e la somma è diretta, ovvero $V = U \oplus^\perp W$.

Dimostrazione. *i*) Per dimostrare che $Rad(\phi) = Rad(\phi_{|_U}) + Rad(\phi_{|_W})$ facciamo vedere che sussiste una doppia inclusione:

$\cdot \subset$: Ovvio in quanto $Rad(\phi_{|_U}) \supset Rad(\phi)$ e $Rad(\phi_{|_W}) \supset Rad(\phi)$ e quindi anche la loro somma contiene $Rad(\phi)$.

$\cdot \supset$: Sia $x \in Rad(\phi_{|_U}) + Rad(\phi_{|_W})$, esistono dunque $u \in Rad(\phi_{|_U})$ e $w \in Rad(\phi_{|_W})$ tali per cui $x = u + w$. Mostriamo che $x \in Rad(\phi)$: sia allora $v \in V$; sappiamo per ipotesi che $V = U + W$ e dunque esistono $u_0 \in U$, $w_0 \in W$ tali per cui $v = u_0 + w_0$. Valutiamo $\phi(v, x)$:

$$\phi(v, x) = \phi(u_0 + w_0, u + w) = \phi(u_0, u) + \phi(u_0, w) + \phi(w_0, u) + \phi(w_0, w)$$

Notiamo che $\phi(u_0, u) = 0$ in quanto $u_0 \in Rad(\phi_{|_U})$ e analogamente $\phi(w_0, w) = 0$ in quanto $w_0 \in Rad(\phi_{|_W})$, inoltre $\phi(u_0, w) = \phi(w_0, u) = 0$ in quanto per potesi $U \perp W$: giungiamo dunque alla conclusione che $\phi(v, x) = 0$ ovvero che

$$Rad(\phi_{|_U}) + Rad(\phi_{|_W}) \subset Rad(\phi)$$

ii) Dobbiamo mostrare che se $S \subset W$ allora $S^\perp = (S^\perp \cap W) + U$ (notare che le ipotesi non richiedono che S sia un sottospazio). Mostriamo che sussiste una doppia inclusione:

$\cdot \supset$: Notiamo innanzitutto che si ha ovviamente $S^\perp \cap W \subset S^\perp$, inoltre, per quanto visto a teoria, si ha che per ogni insieme A, l'insieme $A^\perp$ è un sottospazio, e quindi $S^\perp$ è un sottospazio. Per altro, dalla teoria, sappiamo che se $S \subset W$, allora $W^\perp \subset S^\perp$ e dato che $U \perp W$, naturalmente $U \subset W^\perp$ e quindi per transitività $U \subset W^\perp \subset S^\perp \implies U \subset S^\perp$: siamo così arrivati a stabilire che $U \subset S^\perp$ e che $S^\perp \cap W \subset S^\perp$ e quindi anche la loro somma è un sottospazio di $S^\perp$, ovvero

$$S^\perp \supset (S^\perp \cap W) + U$$

$\cdot \subset$: Dalle ipotesi sappiamo che $V = U + W$; se dunque $s' \in S^\perp \subset V$, avremo che $s' \in V$ e dunque $\exists\, u \in U, w \in W$ tali per cui $s' = w + u$: se dimostriamo che $w \in S^\perp$ abbiamo finito, in quanto $w \in W$ e avremmo dimostrato che qualsiasi elemento di $S^\perp$ si può scrivere come somma tra un elemento di U e un elemento di $S^\perp \cap W$. È facile vedere che $w = s' - u$ e dato che, per quanto visto poco fa, $U \subset S^\perp$, si ha che $u \in S^\perp$ e quindi, dato che questo un sottospazio, anche $w = s' - u \in S^\perp$, il che conclude la dimostrazione.

iii) Se ϕ è non degenere, sappiamo dalla teoria che possiamo scrivere V come

$$V = W \oplus^\perp W^\perp$$

e quindi che $dimV = dimW + dimW^\perp$. Ma d'altronde $V = U + W$ per ipotesi e quindi per Grassmann $dimV \leq dimU + dimW$, da cui segue che $dimW + dimW^\perp \leq dimU + dimW$ ovvero che $dimW^\perp \leq dimU$. Sappiamo però che $U \perp W$ e dunque $U \subset W^\perp$, ovvero $dimU \leq dimW^\perp$: per doppia disuguaglianza segue che $dimU = dimW^\perp$. Di conseguenza, per contenimento e uguaglianza dimensionale $U = W^\perp$ e quindi

$$V = W \oplus^\perp W^\perp = W \oplus^\perp U$$

22.2 Esercizio 2: ortogonalità geometrica

Sia $V = \mathbb{R}^n$ e ϕ il prodotto scalare standard (visto nell'esercitazione del 28-03-2022, nella sezione 20.2). Sia $W \subset \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme: definiamo il traslato di W passante per $q \in \mathbb{R}^n$ come l'insieme

$$W + q = \{p \in \mathbb{R}^n \,|\, p = w + q,\ w \in W\}$$

ovvero come l'insieme dei punti p che si ottengono traslando il sottoinsieme W di un vettore q. Ci chiediamo come è fatta la proiezione di un generico punto $p \in W + q$ su un sottospazio $H \subset \mathbb{R}^n$. Facendo un paragone a livello geometrico reale, se si vuole proiettare un punto su un piano, si prende la retta ortogonale al piano passante per il punto e si considera la proiezione del punto come l'intersezione tra la retta e il piano. Formalmente quindi possiamo dire che la proiezione ortogonale del punto $p \in W + q$ sul sottospazio H è tale che

$$\pi_H^\perp(p) \in (H^\perp + p) \cap H$$

Dopo aver definito la proiezione ortogonale passiamo all'Esercizio:

i) Si dimostri che $(H^\perp + p) \cap H$ contiene un solo punto (che è proprio la proiezione ortogonale $\pi_H^\perp(p)$).

ii) Si dimostri che se $q \in H$, allora $\pi_H^\perp(q) = q$ e che se $p \in H^\perp$, allora $\pi_H^\perp(p) = 0$.

iii) Si dimostri che la mappa $\pi_H^\perp : V \longrightarrow H$ (che per il punto *i*) è una funzione in quanto associ a un vettore di V un solo vettore di H) è lineare.

iv) Si dimostri che $\pi_H^\perp(q) = \sum_{i=1}^{dimH} c(w_i, q)w_i$, dove $\{w_1, ..., w_{dimH}\}$ è una base ortogonale di H.

v) Si dimostri infine che $\pi_H^\perp$ può essere vita come la mappa $\pi_H^\perp : V = H^\perp \oplus^\perp H \longrightarrow H$ che associa al vettore $V \ni v = h + h'$ (con $h \in H$ e $h' \in H^\perp$) il vettore h di H, ovvero $\pi_H^\perp(v) = h$.

Dimostrazione. *i*) Sia $p \in W + q$, vogliamo dimostrare che $\pi_H^\perp(p)$ è ben definito, ovvero che l'insieme $(H^\perp + p) \cap H$ è un singoletto (=insieme con un unico elemento). Per farlo, supponiamo che ci siano due punti $p + h'$ e $p + h''$ che appartengono ad H, con $h', h'' \in H^\perp$ (notare che $p + h'$ e $p + h''$ appartengono a $H^\perp + p$: stiamo supponendo quindi che esistano due punti nell'intersezione). Dato che $p + h', p + h'' \in H$ e H è un sottospazio, anche la loro differenza appartiene a H, ovvero $p + h' - p - h'' = h' - h'' \in H$, ma dato che $h', h'' \in H^\perp$, si ha che $h' - h'' \in H^\perp$, ovvero che $h' - h'' \in H \cap H^\perp$; dato che però ϕ è non degenere, si deve avere $H \cap H^\perp = \{0\}$, da cui $h' - h'' = 0 \Longrightarrow h' = h''$. Questo conclude la dimostrazione.

ii) Mostriamo che se $q \in H$, allora $\pi_H^\perp(q) = q$: dalla definizione di proiezione ortogonale si ha che $\pi_H^\perp(q) \in (H^\perp + p) \cap H \subset H$; se $q \in H$, allora, dato che H è un sottospazio, si deve avere $\pi_H^\perp(q) - q \in H$: per quanto visto nel punto *i*) $\pi_H^\perp(q) = p + h'$ con $h' \in H^\perp$ e quindi sostituendo sopra si ha che $\pi_H^\perp(q) - q = q + h' - q = h' \in H$ e dato che $h' \in H^\perp$, $h' \in H \cap H^\perp = \{0\} \Longrightarrow h' = 0$, ovvero $\pi_H^\perp(q) = q$.
Per mostrare invece che se $p \in H^\perp$, allora $\pi_H^\perp(p) = 0$, basta notare che se $p \in H^\perp$, allora $H^\perp + p = H^\perp$ in quanto $H^\perp$ è un sottospazio e dunque $\pi_H^\perp(p) \in H^\perp \cap H = \{0\}$ che implica $\pi_H^\perp(p) = 0$.

iii) Mostriamo che $\pi_H^\perp$ è sia additiva che omogenea:

ADDITIVITÀ: Mostriamo che $\pi_H^\perp(p + q) - \pi_H^\perp(p) - \pi_H^\perp(q) = 0\ \forall p, q \in \mathbb{R}^n$: ovviamente

$$\pi_H^\perp(p + q) - \pi_H^\perp(p) - \pi_H^\perp(q) \in H$$

d'altro canto, per quanto visto nel punto *i*), esistono $h', h'', h''' \in H^\perp$ tali per cui

$$\pi_H^\perp(p + q) = p + q + h',\ \ \pi_H^\perp(p) = p + h'',\ \ \pi_H^\perp(q) = q + h'''$$

e quindi $\pi_H^\perp(p+q) - \pi_H^\perp(p) - \pi_H^\perp(q) = p + q - q - p + h' + h'' + h''' = h' - h'' - h'''$ e dato che $H^\perp$ è un sottospazio si ha che $h' - h'' - h''' \in H^\perp \cap H = \{0\}$, ovvero $h' - h'' - h''' = 0$: poiché

$h'-h''-h''' = \pi_H^{\perp}(p+q)-\pi_H^{\perp}(p)-\pi_H^{\perp}(q)$, si ha $\pi_H^{\perp}(p+q)-\pi_H^{\perp}(p)-\pi_H^{\perp}(q) = 0$, come volevamo.

OMOGENEITÀ: Mostriamo che $\pi_H^{\perp}(\alpha p) - \alpha\pi_H^{\perp}(p) = 0\ \forall\alpha \in \mathbb{R}$: ovviamente

$$\pi_H^{\perp}(\alpha p) - \alpha\pi_H^{\perp}(p) \in H$$

d'altro canto, per quanto visto nel punto i), esistono $h', h'' \in H^{\perp}$ tali per cui

$$\pi_H^{\perp}(\alpha p) = \alpha p + h', \ \ \alpha\pi_H^{\perp}(p) = \alpha(p + h'') = \alpha p + \alpha h''$$

e quindi $\pi_H^{\perp}(\alpha p) - \alpha\pi_H^{\perp}(p) = \alpha p - \alpha p + h' - \alpha h'' = h' - \alpha h''$ e dato che $H^{\perp}$ è un sottospazio si ha che $h' - \alpha h'' \in H^{\perp} \cap H = \{0\}$, ovvero $h' - \alpha h'' = 0$: poiché $h' - \alpha h'' = \pi_H^{\perp}(\alpha p) - \alpha\pi_H^{\perp}(p) - \alpha\pi_H^{\perp}(q)$, si ha $\pi_H^{\perp}(\alpha p) - \alpha\pi_H^{\perp}(p) = 0$, come volevamo.

iv) Vogliamo far vedere che la definizione di proiezione data sopra è equivalente alla definizione che sfrutta i coefficienti di Fourier: Sia $\{w_1, ..., w_{dimH}\} \subset H$ una base ortogonale: notiamo che

$$q' = \sum_{i=1}^{dimH} c(w_i, q)w_i \in H$$

in quanto è una combinazione lineare di elementi di H. Vogliamo mostrare che $q' - q \in H^{\perp}$, infatti, da qui segue subito che $H \ni q' = q + (q' - q) \in q + H^{\perp}$ e quindi $q' \in H \cap (q + H^{\perp})$ che per il punto i) contiene un unico punto ed è proprio la proiezione.
Facciamo allora vedere che $q' - q \in H^{\perp}$, ovvero che $\forall i \in \{1, ..., dimH\}\ \phi(w_i, q' - q) =< w_i, q' - q >= 0$ (basta far vedere che $q' - q$ è ortogonale a ogni elemento di una base di H): fissando arbitrariamente i otteniamo:

$$< w_i, q' - q >=< w_i, -q + \sum_{j=1}^{dimH} c(w_j, q)w_i >= - < w_i, q > + \sum_{j=1}^{dimH} c(w_j, q) < w_i, w_j >=$$

$$- < w_i, q > + \sum_{j=1}^{dimH} \frac{< w_j, q >}{< w_j, w_j >} < w_i, w_j >= - < w_i, q > + < w_i, q >= 0$$

Dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che se $i \neq j$ allora $< w_i, w_j >= 0$ in quanto la base $\{w_1, ..., w_{dimH}\}$ è ortogonale, mentre se $i = j$ allora

$$\frac{< w_j, q >}{\cancel{< w_j, w_j >}} \cancel{< w_j, w_j >} =< w_j, q >$$

e quindi, fissando i, si ha che

$$< w_i, \sum_{j=1}^{dimH} c(w_j, q)w_i >=< w_i, q >$$

Dato che la scelta di i è arbitraria, questo vale $\forall i = 1, ..., dimH$ e quindi $q' - q \in H^{\perp}$.

v) Sia $V = H^{\perp} \oplus^{\perp} H$ (possibile in quanto ϕ è non degenere): consideriamo $q \in V$, allora esistono UNICI $h \in H$, $h' \in H^{\perp}$ tali per cui $q = h + h'$: nel punto *iv*) abbiamo mostrato che esiste un $q' \in H$ (la somma con i coefficienti di Fourier) e che $q - q' \in H^{\perp}$ (la cui somma è proprio q). La proiezione presentata nelle ipotesi del punto *v*) associa a $h + h'$ il solo h, e quindi in questo caso si ha che $q = q - q' + q' \xrightarrow{\pi_H^{\perp}} q'$, che è proprio la proiezione del punto *iv*), che abbiamo già essere dimostrato essere uguale alla definizione del punto *i*) (in poche parole gli unici h, h' che esistono sono proprio $q - q'$ e q' e la proiezione definita come sopra associa a q q', ovvero $\pi_H^{\perp}(q) = q'$ che è la definizione data nel punto *iv*)).

22.3 Esercizio 3

Sia $V = M(n, \mathbb{K}) = (gl_n)$ (notazione usata nell'algebra di Lie), con $char\mathbb{K} \neq 2$ e sia $\phi \in PS(V)$ definito da $\phi(A, B) = tr(A \cdot B)$ (notiamo che questo prodotto scalare è "la stessa cosa a meno di moltiplicazione per scalare" della forma di Killing per $\mathfrak{Sl}_n$, vista nell'Esercitazione 28-03-2022, sezione 20.4). Si determini una base ortogonale di V rispetto a ϕ.

Soluzione: Consideriamo la base canonica di V formata dalle matrici $E_{ij} = (\delta_{ij})_{i,j}$ costituite da tutti zeri, a parte un 1 nell'entrata i, j, ordinata nel modo seguente:

$E_{11}, ..., E_{nn}, E_{1,n}, E_{n,1}, ..., E_{n-1,n}, E_{n,n-1}, E_{1,n-1}, E_{n-1,1}, E_{2,n-1}, E_{n-1,2}, ..., E_{n-2,n-1}, E_{n-1,n-2}, ..., E_{1,2}, E_{2,1}$

(Accoppiati e a "specchio": i primi n sono gli elementi che generano la diagonale, gli altri sono coppie del tipo E_{hk}, E_{kh} con $1 \leq h < k \leq n$ e con k decrescente, da n fino a 2). Notiamo che

$$E_{ij} \cdot E_{hk} = \begin{cases} 0 & j \neq h \\ E_{ik} & j = h \end{cases}$$

(se si pensa al prodotto matriciale righe per colonna è chiaro), inoltre

$$tr(E_{ij}) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Mettendo tutto insieme, ne consegue che la matrice $M_B(\phi)$ è fatta nel seguente modo

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dove i primi 1 sulla diagonale (che sono n) derivano da E_{ii} e il resto dei blocchi 2×2 dipendono da come abbiamo ordinato la base e dal fatto che, se $h \neq k$, $\phi(E_{hk}, E_{kh}) = tr(E_{hk} \cdot E_{kh}) = tr(E_{hh}) = 1$ e $\phi(E_{hk}, E_{hk}) = tr(E_{hk} \cdot E_{hk}) = tr(0) = 0$ (ci sono $\frac{n^2-n}{2}$ blocchi 2×2). Dato che questa matrice ha rango massimo, ϕ è non degenere.
Volendo trovare una base ortogonale, notiamo che il sottospazio generato da E_{ii} (per $i = 1, ..., n$) è ortogonale a tutto il resto (tutto il resto della riga è nulla!): possiamo quindi considerare i E_{ii} come i primi elementi della base ortogonale. Per completare dunque la base, ci basterebbe ortogonalizzare le coppie che formano i blocchi 2×2: infatti ogni blocco genera un sottospazio ortogonale a tutto il resto (tutto il resto delle due righe è nullo)... Il problema è che la base del sottospazio NON è ortogonale! (Infatti E_{hk} e E_{kh} NON sono ortogonali). Dobbiamo allora ortogonalizzare la base $\{E_{hk}, E_{kh}\}$ del sottospazio 2×2: se ad esempio modifichiamo la base nel modo seguente $\{E_{hk} - E_{kh}, E_{hk} + E_{kh}\}$ si ha che essa è ortogonale, in quanto

$$\phi(E_{hk} - E_{kh}, E_{hk} + E_{kh}) = \phi(E_{hk}, E_{hk}) - \phi(E_{kh}, E_{hk}) + \phi(E_{hk}, E_{kh}) - \phi(E_{kh}, E_{kh}) =$$

$$= -\phi(E_{kh}, E_{hk}) + \phi(E_{hk}, E_{kh}) = 0$$

Ricongiungendo il tutto si ha che la base $B = \{E_{ii}, E_{hk} + E_{kh}, E_{hk} - E_{kh}\}$, con $i = 1, ..., n$ e $1 \leq h < k \leq n$, è una base ortogonale di V.

22.4 Esercizio 4

Siano $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ due matrici fissate linearmente indipendenti. Definiamo su $M(n, \mathbb{K})$ due prodotti scalari $\phi_{A,B}, \psi_{A,B} : M(n, \mathbb{R}) \times M(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ nel seguente modo:

$$\phi_{A,B}(X, Y) = tr(A \cdot X)tr(A \cdot Y) - tr(B \cdot X)tr(B \cdot Y)$$

$$\psi_{A,B}(X, Y) = tr(A \cdot X)tr(B \cdot Y) + tr(B \cdot X)tr(A \cdot Y)$$

Dimostrare che $\phi_{A,B}$ e $\psi_{A,B}$ sono isometrici.

Dimostrazione. Per mostrare che i due prodotti scalari sono isometrici, dobbiamo cercare un isometria f tra $(M(n,\mathbb{R}), \psi_{A,B})$ e $(M(n,\mathbb{R}), \phi_{A,B})$. Supponiamo che tale isometria esista: necessariamente si deve avere che $f(Rad(\psi_{A,B})) = Rad(\phi_{A,B})$. Mostriamo quindi innanzitutto come sono fatti i radicali dei due prodotti scalari:

$$Rad(\phi_{A,B}) = \{X \in M(n,\mathbb{R}) \mid tr(A \cdot X)tr(A \cdot Y) - tr(B \cdot X)tr(B \cdot Y) = 0 \ \ \forall Y \in M(n,\mathbb{R})\}$$

$$Rad(\psi_{A,B}) = \{X \in M(n,\mathbb{R}) \mid tr(A \cdot X)tr(B \cdot Y) + tr(B \cdot X)tr(A \cdot Y) = 0 \ \ \forall Y \in M(n,\mathbb{R})\}$$

Notiamo innanzitutto che vale una proprietà molto importante: sia $M \in M(n,\mathbb{R})$ una matrice non nulla, allora $\exists N \in M(n,\mathbb{R})$ tale per cui $tr(N \cdot M) \neq 0$ (in realtà vale su ogni campo): infatti se $M \neq 0$ allora esiste un'entrata $m_{ij} \neq 0$: moltiplicando M per E_{ji} otteniamo l'elemento m_{ij} sulla diagonale della matrice prodotto, e dunque una traccia non nulla. Scoperta questa cosa, si ha che il radicale di $\phi_{A,B}$ può essere visto come

$$Rad(\phi_{A,B}) = \{X \in M(n,\mathbb{R}) \mid tr(A \cdot X) = tr(B \cdot X) = 0 \ \ \forall Y \in M(n,\mathbb{R})\}$$

(segue dall'indipendenza lineare di A e di B e dal fatto che dipenda da ogni matrice $Y \in M(n,\mathbb{R})$) che possiamo reinterpretare come

$$Rad(\phi_{A,B}) = A^{\perp_{tr(MN)}} \cap B^{\perp_{tr(MN)}}$$

(dove $tr(MN)$ è il classico prodotto scalare traccia definito su $M(n,\mathbb{R})$)
Ma i sottospazi $A^{\perp_{tr(MN)}}$ e $B^{\perp_{tr(MN)}}$ sono distinti: infatti, se per assurdo fossero uguali, si avrebbe $A^{\perp_{tr(MN)}} = B^{\perp_{tr(MN)}}$ e dunque anche $(A^{\perp_{tr(MN)}})^{\perp_{tr(MN)}} = (B^{\perp_{tr(MN)}})^{\perp_{tr(MN)}}$, ma $(A^{\perp_{tr(MN)}}) \perp SpanA$ e $B^{\perp_{tr(MN)}} \perp SpanB$ e quindi $(A^{\perp_{tr(MN)}})^{\perp_{tr(MN)}} = SpanA$ e $(B^{\perp_{tr(MN)}})^{\perp_{tr(MN)}} = SpanB$ (l'insieme delle matrici ortogonali ad A è ortogonale anche a tutto il sottospazio $SpanA$, stesso con B): sostituendo nell'uguaglianza si avrebbe $SpanA = SpanB$, che è assurdo in quanto A e B sono linearmente indipendenti per ipotesi. Inoltre, si è dimostrato nell'Esercizio precedente che la traccia è un prodotto scalare non degenere (la matrice aveva rango massimo): per la teoria sappiamo allora che

$$dim(A^{\perp_{tr(MN)}}) = dim(M(n,\mathbb{R})) - dim(SpanA) = n^2 - 1$$

$$dim(B^{\perp_{tr(MN)}}) = dim(M(n,\mathbb{R})) - dim(SpanB) = n^2 - 1$$

e quindi per Grassmann l'intersezione è diversa da $\{0\}$, infatti

$$dim(A^{\perp_{tr(MN)}} + B^{\perp_{tr(MN)}}) = dim(A^{\perp_{tr(MN)}}) + dim(A^{\perp_{tr(MN)}}) - dim(A^{\perp_{tr(MN)}} \cap B^{\perp_{tr(MN)}}) =$$

$$= n^2 - 1 + n^2 - 1 - dim(A^{\perp_{tr(MN)}} \cap B^{\perp_{tr(MN)}}) = 2n^2 - 2 - dim(A^{\perp_{tr(MN)}} \cap B^{\perp_{tr(MN)}})$$

Ora, $dim(A^{\perp_{tr(MN)}} \cap B^{\perp_{tr(MN)}}) = n^2 - 1$ o $dim(A^{\perp_{tr(MN)}} \cap B^{\perp_{tr(MN)}}) = n^2 - 2$, in quanto, essendo distinti, la dimensione dell'intersezione non può essere l'intero spazio delle matrici, né può avere dimensione più piccola, in quanto

$$2n^2 - 2 - dim(A^{\perp_{tr(MN)}} \cap B^{\perp_{tr(MN)}}) \leq n^2$$

e quindi

$$dim(A^{\perp_{tr(MN)}} \cap B^{\perp_{tr(MN)}}) \geq n^2 - 2$$

Non si può avere tuttavia che $dim(A^{\perp_{tr(MN)}} \cap B^{\perp_{tr(MN)}}) = n^2 - 1$ in quanto sia $SpanA$ che $SpanB$ stanno in un supplementare di $A^{\perp_{tr(MN)}} \cap B^{\perp_{tr(MN)}}$ contemporaneamente (e dato che $SpanA$ e $SpanB$ sono linearmente indipendenti il supplementare ha dimensione almeno 2). Segue a ciò dunque che $rnk(\phi_{A,B}) = 2$.
Dal fatto che $A^{\perp_{tr(MN)}}$ e $B^{\perp_{tr(MN)}}$ sono distinti e che l'intersezione ha dimensione $n^2 - 2$ segue che $\exists M \in A^{\perp_{tr(MN)}}/B^{\perp_{tr(MN)}}$ e $\exists N \in B^{\perp_{tr(MN)}}/A^{\perp_{tr(MN)}}$. Questo ci dice che se $X \in Rad(\psi_{A,B})$, allora $\psi_{A,B}(X, M) = tr(A \cdot X)tr(B \cdot M) + tr(B \cdot X)tr(A \cdot M) = 0$, ma $M \in A^{\perp_{tr(MN)}}/B^{\perp_{tr(MN)}}$ e quindi $tr(A \cdot M) = 0$ e $tr(B \cdot M) \neq 0$, quindi $\psi_{A,B}(X, M) = tr(A \cdot X)tr(B \cdot M) = 0 \Longrightarrow tr(A \cdot X) = 0$. Utilizzando N invece di M otteniamo $tr(B \cdot X) = 0$. Si ha allora che $Rad(\psi_{A,B}) \subset A^{\perp_{tr(MN)}} \cap B^{\perp_{tr(MN)}}$; ma è ovvio che $A^{\perp_{tr(MN)}} \cap B^{\perp_{tr(MN)}} \subset Rad(\psi_{A,B})$, in quanto se $X \in A^{\perp_{tr(MN)}} \cap B^{\perp_{tr(MN)}}$, allora $tr(A \cdot X) = tr(B \cdot X) = 0$ e quindi $\psi_{A,B}(X, Y) = 0$: il doppio contenimento implica l'uguaglianza $Rad(\psi_{A,B}) = A^{\perp_{tr(MN)}} \cap B^{\perp_{tr(MN)}}$; ma avevamo scoperto precedentemente che $A^{\perp_{tr(MN)}} \cap B^{\perp_{tr(MN)}} = Rad(\phi_{A,B})$ e quindi per transitività

$$Rad(\psi_{A,B}) = Rad(\phi_{A,B})$$

Quindi abbiamo trovato un isomorfismo che lega i radicali: l'identità (ristretta).
Vogliamo ora quindi costruire un isomorfismo tra i supplementari dei due radicali (i radicali sono ortogonali a tutto): $Span(M, N)$ è un supplementare di $Rad(\phi_{A,B})$: come è fatta la matrice associata a $\phi_{A,B}{}_{|_{Span(M,N)}}$ nella base $\{M, N\}$?

$$M_{\{M,N\}}(\phi_{A,B}{}_{|_{Span(M,N)}}) = \begin{pmatrix} -tr(B \cdot M)^2 & 0 \\ 0 & tr(A \cdot N)^2 \end{pmatrix}$$

Quindi tale base è ortogonale. Invece come è fatta la matrice associata a $\psi_{A,B}{}_{|_{Span(M,N)}}$ nella base $\{M, N\}$?

$$M_{\{M,N\}}(\psi_{A,B}{}_{|_{Span(M,N)}}) = \begin{pmatrix} 0 & tr(A \cdot N)tr(B \cdot M) \\ tr(A \cdot N)tr(B \cdot M) & 0 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare un'isometria tra questi due sottospazi: definendo $\overline{M} = \frac{M}{tr(B \cdot M)}$ e $\overline{N} = \frac{N}{tr(A \cdot N)}$ si ha che

$$f : (Span(M, N), \phi_{A,B}{}_{|_{Span(\overline{M},\overline{N})}}) \longrightarrow (Span(M, N), \psi_{A,B}{}_{|_{Span(\overline{M},\overline{N})}})$$

definita come

$$\overline{M} \mapsto \frac{1}{2}(\overline{M} - \overline{N}); \quad \overline{N} \mapsto \overline{M} + \overline{N}$$

è l'isometria cercata.

23 Esercitazione 11-04-2022

23.1 Esercizio 1

Sia $V = \mathbb{R}^4$ e siano $U, W \subset \mathbb{R}^4$ definiti come

$$U = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}), \;\; W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, z = 0 \right\}$$

Si costruisca, se possibile, un prodotto scalare $\phi \in PS(V)$ tale per cui:
i) $U \subset W^\perp$
ii) $\exists\, Z \subset V$ sottospazio di dimensione 3 tale che $\phi_{|Z}$ sia non degenere
iii) Non esiste alcuna base ortogonale contenente e_4
iv)

$$\phi(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}) = \phi(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = 2$$

Nel caso in cui un tale ϕ esista, si dimostri che $CI(\phi)$ contiene un sottospazio di dimensione 2, ma nessun sottospazio di dimensione 3.

Dimostrazione. La prima cosa che dobbiamo studiare (in generale) è la degenericità o meno del prodotto scalare. Notiamo che $dimU = 2$ e $dimW = 3$, per Grassmann

$$dim(U \cap W) = dimU + dimW - dim(U + W) = 5 - dim(U + W) \geq 1$$

in quanto $dim(U + W) \leq 4$ e quindi i due sottospazi si intersecano in almeno una retta, ma notiamo che il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ non appartiene a W, in quanto $z = -1$, e quindi $U \neq W$, che implica $dim(U \cap W) = 1$. È anche semplice vedere chi è il sottospazio intersezione, infatti $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in W$ e dunque appartiene a $U \cap W$: per inclusione e uguaglianza dimensionale

$$U \cap W = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})$$

Per di più, ancora per Grassmann $dim(U + W) = 4$ e quindi $U + W = \mathbb{R}^4$. Notiamo però che per il punto *i)*, $U \perp W$ e quindi, assumendo l'esistenza del prodotto scalare, si ha che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \perp U$$

in quanto sta in W, ma anche

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \perp W$$

in quanto sta in U; inoltre questo è l'UNICO vettore (assieme ai suoi multipli) ortogonale a tutti gli elementi di $U + W = \mathbb{R}^4$ e quindi

$$Rad(\phi) = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid v \perp \mathbb{R}^4\} = U \cap W = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})$$

e quindi $dimRad(\phi) = 1$, da cui $rnk\phi = 3$ e ϕ è degenere.
Supponiamo ora che esista $W' \subset CI(\phi)$ di dimensione 3 (notiamo che è un punto da fare della dimostrazione): siano $w_1', w_2', w_3' \in W'$ tali che $\{w_1', w_2', w_3'\}$ sia una base di W': per quanto visto a teoria si ha che $\phi_{|_{W'}} = 0$; estendendo quindi $\{w_1', w_2', w_3'\}$ a una base di $\mathbb{R}^4$ (basta aggiungere un vettore u e chiamare $B = \{w_1', w_2', w_3', u\}$) si ha che

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & g \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

con $a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{R}$. Ma questa matrice ha rango minore o uguale di 2, e ciò è in contraddizione con quanto trovato in precedenza: non può quindi esistere un sottospazio di dimensione 3 in $CI(\phi)$.
Facciamo invece vedere che può esistere un sottospazio di dimensione 2 all'interno di $CI(\phi)$ (ovvero stiamo dimostrando che l'asserzione finale dipende solo da quanto detto finora). Ovviamente

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in Rad(\phi) \subset CI(\phi)$$

Ci basta allora determinare un vettore v che sta nel cono isotropo e linearmente indipendente con il vettore precedente: il sottospazio da loro generato ha dimensione 2 ed è costituito unicamente da vettori isotropi, e per di più, dato che $u \in Rad(\phi)$, si ha anche che $\phi(u, v) = 0$. Osserviamo che $e_4 \in CI(\phi)$ in quanto, per il punto $iii)$ non esistono basi ortogonali contenenti e_4: infatti, supponiamo che $e_4 \notin CI(\phi)$, allora possiamo considerare la base ordinata e_4, e_1, e_2, e_3 e applicare Gram-Schmidt per ottenere una base ortogonale (si ha un assurdo in quanto Gram-Schmidt cerca il primo vettore non isotropo, e nel nostro caso sarebbe e_4, e successivamente trova una base ortogonale contenente questo vettore). Dato inoltre che e_4 è linearmente indipendente da u, si ha che il sottospazio $U = Span(u, e_4)$ ha dimensione 2 ed è contenuto nel cono isotropo. Notiamo inoltre che $e_4 \in W$.
L'idea adesso per costruire il nostro prodotto scalare è quello di prendere una base adatta, ovvero una base su cui conosciamo abbastanza cose riguardanti il prodotto scalare, e successivamente scrivere la matrice associata al prodotto scalare nella base. Sia allora B l'insieme

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Notiamo che i primi due vettori sono una base di U, il secondo vettore è una base di $Rad(\phi)$, gli ultimi 3 vettori sono una base di W e conosciamo un (solo) valore che assume ϕ sul terzo vettore: dato che sapevamo che $U + W = \mathbb{R}^4$, si ha che B è effettivamente una base di $\mathbb{R}^4$ (è ovvia l'indipendenza lineare data la posizione degli zeri). Costruiamo la matrice associata a ϕ nella base B:

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}$$

Dove

$$x = \phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}), \quad b = \phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}), \quad c = \phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

la seconda riga e la seconda colonna sono nulle in quanto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ genera il radicale e gli zeri in posizione $1,3$ $1,4$ e simmetricamente $3,1$ $4,1$ derivano dal fatto che $U \perp W$ per ipotesi. Inoltre $x, c \neq 0$ in quanto $rnk\phi = 3$.

Per l'ipotesi iv) abbiamo delle informazioni sul vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$: scriviamo questo vettore come combinazione lineare di B:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e riscrivendo l'uguaglianza di iv) otteniamo

$$2 = \phi(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) =$$

$$= \phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) - \phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) + 2\phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) - 2\phi(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = 0-0+2b-2c = 2b-2c$$

ovvero $2b - 2c = 2 \implies b - c = 1$. Facendo lo stesso ragionamento con l'altra uguaglianza:

$$2 = \phi(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}) = \phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) =$$

$$= \phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}) - \phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) + 2\phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) - 2\phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) -$$

$$-\phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}) + \phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) - 2\phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) + 2\phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) +$$

$$+2\phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}) - 2\phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) + 4\phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) - 4\phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) -$$

$$-2\phi(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}) + 2\phi(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) - 4\phi(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) + 4\phi(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) =$$

$$x + 4b - 4c - 4c$$

ovvero $x + 4b - 4c - 4c = x - 4c + 4(b - c) = x - 4c + 4 = 2$: otteniamo quindi il sistema

$$\begin{cases} b = 1 + c \\ x = -2 + 4c \end{cases}$$

L'osservazione fatta in precedenza sul fatto che $x, c \neq 0$ implica che $c \neq \frac{1}{2}$, $x \neq -2$ e che $b \neq 1$. Dato che ora la matrice dipende unicamente da c, che è il valore del prodotto scalare

$$\phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

possiamo scegliere arbitrariamente il valore da assegnare a tale prodotto scalare e ottenere una matrice numerica: se ad esempio scegliamo $c = 1$, si avrà

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ci manca ora da controllare se quanto trovato è coerente con l'ultima condizione non ancora verificata, ovvero la ii): ci chiediamo se esiste un sottospazio Z di dimensione 3 tale per cui $\phi_{|Z}$ è non degenere: notiamo che considerando il sottospazio

$$Z = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

generato dal primo, terzo e quarto vettore di B, la matrice associata a $\phi_{|Z}$ è

$$M_B(\phi_{|Z}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3 e quindi $\phi_{|Z}$ è non degenere. Questo conclude la dimostrazione: tale prodotto scalare esiste (in realtà ne esiste un'intera famiglia, al variare di c).

23.2 Rappresentazione di funzionali

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita (con $char\mathbb{K} \neq 2$). Fissiamo $\phi \in PS(V)$ e sia $f \in V^*$ un funzionale: f è detto ϕ-rappresentabile se e solo se $\exists v \in V$ tale per cui $\phi(v, \cdot) = f$. Osserviamo che il morfismo di rappresentazione $F_\phi : V \longrightarrow V^*$, che associa $v \mapsto \phi(v, \cdot)$ ha come nucleo $Rad(\phi)$, quindi, se ϕ è non degenere, F_ϕ è iniettiva e, dato che $dimV^* = dimV$ in quanto V ha dimensione finita, si ha anche surgettività e quindi F_ϕ è un isomorfismo. Si ha quindi che se ϕ è non degenere, ogni funzionale è ϕ-rappresentabile.
Mostriamo con un esempio che se $dimV = +\infty$, allora la cosa non è valida. Sia $V = \mathbb{R}[x] \subset C([0, 1])$ e sia $< \cdot, \cdot >$ il prodotto scalare (definito positivo e non degenere) definito nell'esercitazione del 28-03-2022:

$$< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)\, dx$$

È vero che un prodotto scalare definito positivo non degenere è non degenere anche su ogni restrizione a un suo sottospazio, infatti, dalla teoria, ogni prodotto scalare definito è tale per cui $\forall v \in V,\ q_\phi(v) > 0$ e dunque anche restringendo a un qualsiasi sottospazio $W \subset V$ si ha che $\forall w \in W,\ q_\phi(w) > 0$, ovvero non ci sono vettori isotropi $\Longrightarrow Rad(\phi_{|W}) = \{0\}$ (in quanto il radicale è contenuto nel cono isotropo, che nel nostro caso è $CI(\phi_{|W}) = \{0\}$).
Consideriamo $\psi \in PS(\mathbb{R}[x])$ definito come $\psi =< \cdot, \cdot >_{|\mathbb{R}[x]}$, allora ψ è non degenere per l'asserzione di sopra. Sia ora $f \in V^* = \mathbb{R}[x]^*$ definito da $f(P) = P(3)$: questo funzionale è rappresentabile? Guarda caso, la risposta è no :)
Mostriamolo: supponiamo per assurdo che f sia ψ-rappresentabile, allora $\exists P$ tale per cui $f = \psi(P, \cdot)$. Dato che P è un polinomio si avrà $P = \sum_{i=0}^m \alpha_i x^i$, con $\alpha_i \in \mathbb{R}$: ma allora $\forall k$, $f(x^k) = \psi(P, x^k)$: si ha $f(x^k) = 3^k$ per come abbiamo definito f, mentre

$$\psi(P, x^k) = \int_0^1 x^k \sum_{i=0}^m \alpha_i x^i = \sum_{i=0}^m \alpha_i \int_0^1 x^{k+i}\, dx = \sum_{i=0}^m \frac{\alpha_i}{i+k+1}$$

si deve quindi avere

$$3^k = \sum_{i=0}^m \frac{\alpha_i}{i+k+1}$$

che implica

$$|3^k| = |\sum_{i=0}^m \frac{\alpha_i}{i+k+1}| \leq \sum_0^m \frac{|\alpha_i|}{k+i+1}$$

e dato che gli α_i sono fissati in quanto P è un polinomio fissato, il membro di destra è costante (la chiamo c) e quindi $3^k \leq c$, ma ciò è assurdo, in quanto valendo per ogni k, vale anche per k molto grandi ($3^k \longrightarrow +\infty$ quando $k \longrightarrow +\infty$) e quindi non può essere limitato da una costante. Si ha quindi che f non è ψ-rappresentabile.

23.3 Esercizio 2

Siano $f, g \in (\mathbb{R}^3)^*$ definiti come

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = x + 3y - 2z, \quad g(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = x + 3y + 2z$$

Definiamo $\phi_A \in PS(\mathbb{R}^3)$ come il prodotto scalare rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare se f e g sono o meno ϕ_A-rappresentabili e, in caso affermativo, trovare $v \in \mathbb{R}^3$ che li rappresenta.

Soluzione: Notiamo in primo luogo che ϕ_A è degenere, in quanto

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e dato che la seconda e la terza colonna sono linearmente indipendenti si ha che $rnk(\phi_A) = 2$ e che quindi $dim Rad(\phi_A) = 1$. Inoltre, poiché $Rad(\phi_A) = Ker A$, si ha che

$$Rad(\phi_A) = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix})$$

(dove 1,1 e -2 sono i coefficienti che troviamo davanti alla combinazione lineare di sopra, che genera il vettore nullo). Osserviamo inoltre che se h è ϕ_A-rappresentabile e $v \in Rad(\phi_A)$, allora $h(v) = \phi_A(v_h, v) = 0$ (in quanto $v \in Rad(\phi_A)$): segue da ciò che $Rad(\phi_A) \subset Ker h$. Dobbiamo quindi controllare sia per f che per g questa condizione (che è necessaria ma non sufficiente):

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}) = 1 + 3 + 4 = 8 \neq 0 \Longrightarrow Rad(\phi_A) \not\subseteq Ker f$$

e quindi per quanto detto sopra f NON è ϕ_A-rappresentabile.

$$g(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}) = 1 + 3 - 4 = 0$$

È dunque possibile che g possa essere rappresentabile. Supponiamo allora che $\exists v \in \mathbb{R}^3$ che rappresenta g, si deve avere allora

$$g(e_1) = 1 = \phi(v, e_1) = \phi(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2x + 2y + 2z$$

$$g(e_2) = 3 = \phi(v, e_2) = \phi(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2x - 2y$$

$$g(e_3) = 2 = \phi(v, e_3) = \phi(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2x + z$$

e quindi, per trovare x, y, z basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 1 \\ 2x - 2y = 1 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $x = \frac{2-z}{2}$, $y = -\frac{z+1}{2}$. Scelto ad esempio $z = 0$, si ha che un vettore che rappresenta g è

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(nota bene che un modo per verificare direttamente la rappresentabilità è quello di scrivere direttamente il sistema: se esso non ha soluzione l'applicazione non è rappresentabile e viceversa, se ha soluzione, lo è).
Osserviamo che se v rappresenta g, allora $v + v_0$, con $v_0 \in Rad(\phi)$, rappresenta anch'esso ϕ (come i sistemi, dove l'insieme delle soluzioni è un sottospazio affine di giacitura Ker).

Dimostriamo ora un punto molto importante: abbiamo fatto vedere sopra che se h è rappresentabile, allora $Rad(\phi) \subset Kerh$. Facciamo vedere che vale anche il contrario, e che dunque abbiamo un metodo diretto per capire se un funzionale è rappresentabile. Dimostriamo quindi la seguente

Proposizione: h è ϕ-rappresentabile $\iff Rad(\phi) \subset Kerh$.

Dimostrazione. Sia $B \subset V$ una base ortogonale di V e sia $M_B(\phi)$ la matrice associata a ϕ nella base B (che è diagonale per quanto visto a teoria):

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove D è una matrice quadrata diagonale (senza zeri sulla diagonale) di ordine uguale a $rnk(\phi)$ e la matrice nulla in basso a destra rappresenta $Rad(\phi)$. Non avendo zeri, si ha anche che $rnkD = rnk\phi$. Per definizione h è ϕ rappresentabile se e solo se $\exists x \in V$ tale per cui $e_i^\top M_B(\phi)[x]_B = h(e_i)$ (gli e_i formano una base ortogonale), ma $e_i^\top M_B(\phi)$ è l'i-esima riga della matrice $M_B(\phi)$. Si giunge dunque alla conclusione che il sistema

$$M_B(\phi)[x]_B = M_B(\phi) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(e_1) \\ \vdots \\ h(e_n) \end{pmatrix}$$

ha soluzione se e solo se $e_i^\top M_B(\phi)[x]_B = h(e_i)$ ha soluzione per ogni $i = 1, ..., n$. Per il criterio di Rouché-Capelli il sistema ha soluzione se e solo se il rango della matrice completa e di quella dei soli coefficienti sono uguali. Si ha che l amatrice completa ha la forma seguente

$$(M_B(\phi)|b) = \begin{pmatrix} D & 0 & h(e_1) \\ & & \vdots \\ 0 & 0 & h(e_n) \end{pmatrix}$$

Ma notiamo che se $Rad(\phi) \subset Kerh$, allora gli ultimi $dimRad(\phi)$ elementi del vettore dei termini noti sono nulli, in quanto sono proprio i vettori associati al radicale: la soluzione dipende solo dai primi $rnk\phi$ vettori; ma $rnkD$ è massimo e dunque esiste sempre una soluzione! Segue da tutto ciò che h è rappresentabile, ovvero che è vera anche l'altra freccia.

23.4 Rappresentabilità e basi ortogonali

Sia $B = \{b_1, ..., b_n\} \subset V$ una base ortogonale di V e sia $v \in V$, allora sappiamo che esistono (unici) α_i tali per cui $v = \sum_{i \in B} \alpha_i b_i$. Per quanto visto a teoria, gli α_i sono i coefficienti di Fourier $c(v, b_i) = \frac{\phi(v,b)}{\phi(b,b)}$ e quindi abbiamo direttamente la possibilità di trovare i vettori che rappresentano i funzionali.

23.5 Esercizio 3

Sia $M_B(\phi) \in M(3, \mathbb{R})$ la matrice che rappresenta il prodotto scalare ϕ nella base ortogonale $B = \{e_1, e_2, e_3\}$

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

e sia $(\mathbb{R}^3)^* \ni f = x + 3y - 2z$ un funzionale. Si ha che f è rappresentabile per quanto affermato nella proposizione di prima, in quanto $Rad(\phi) = \{0\} \subset Ker f$. Ci chiediamo allora come sia fatto un vettore che rappresenta f. Tramite i coefficienti di Fourier abbiamo

$$v = \frac{\phi(v, e_1)}{\phi(e_1, e_1)} e_1 + \frac{\phi(v, e_2)}{\phi(e_2, e_2)} e_2 + \frac{\phi(v, e_3)}{\phi(e_3, e_3)} e_3$$

Notiamo subito che conosciamo $\phi(e_i, e_i)$ (sono i coefficienti sulla diagonale), inoltre, se v rappresenta f, allora $\phi(v, e_i) = f(e_i)$: giungiamo quindi all'uguaglianza

$$v = -f(e_1)e_1 + \frac{1}{3} f(e_2)e_2 - 3f(e_3)e_3 = -e_1 + e_2 + 6e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

e quindi il vettore di sopra rappresenta f.

24 Esercitazione 02-05-2022

24.1 Esercizio 1

Sia $V = M(2, \mathbb{K})$ e $\phi \in PS(V)$ definito dalla matrice

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dove $B \subset M(2, \mathbb{K})$ è la base $B = \{E_{11}, E_{22}, E_{21}, E_{12}\}$. Sia $f \in V^*$ definita da

$$f(\begin{pmatrix} a & d \\ c & b \end{pmatrix}) = a - 2b - c$$

Si mostri che f è ϕ-rappresentabile e trovare un vettore che rappresenta f. Si risponda poi alla seguente domanda: dato $\alpha \in \mathbb{K}$, $\exists v_\alpha$ tale che v_α rappresenta f e $\phi(v_\alpha, v_\alpha) = \alpha$?

Soluzone: Per quanto visto nell'Esercizio 2 della scorsa esercitazione una condizione necessaria e sufficiente affinché f sia rappresentabile è che $Rad(\phi) \subset Ker f$. Cerchiamo quindi $Rad(\phi)$: per farlo determiniamo $Ker(M_B(\phi))$: come sempre, basta determinare lo spazio delle soluzioni del sistema lineare associato alla matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si traduce nel sistema

$$\begin{cases} x + z + t = 0 \\ 2y + 2z = 0 \\ x + 2y + 3z + t = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $t = 0$, $y = x = -z$, ovvero

$$Ker(M_B(\phi)) = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} ; \middle| \; z \in \mathbb{K} \right\} = Span(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

Adesso, questo vettore è l'immagine della matrice che rappresenta $Rad(\phi)$ mediante l'isomorfismo delle coordinate sulla base B: applichiamo quindi $[]_B^{-1}$ al vettore trovato e otteniamo

$$\left[\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$Rad(\phi) = Span(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix})$$

Per verificare che $Rad(\phi) \subset Ker f$ ci basta verificare che la valutazione di f sulla matrice che genera il radicale dà come risultato 0:

$$f(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}) = -1 - (-1) - 1 = 0$$

si ha quindi che $Rad(\phi) \subset Ker f$ e quindi che f è ϕ-rappresentabile.
Vogliamo ora trovare un vettore che rappresenta f: sia v un vettore che rappresenta f, e sia $w \in Ker f$, allora $\phi(v, w) = f(w) = 0$: otteniamo un'informazione importante, ovvero che i vettori che rappresentano i funzionali sono sempre ortogonali ai vettori del nucleo del funzionale. Per cercare quindi un vettore che genera f possiamo trovare $ker f^\perp$ e successivamente

cercare un vettore qua dentro. Essendo $Kerf$ un funzionale (non nullo), esso è surgettivo e quindi $dimKerf = 4-1 = 3$. Si ha quindi che $dimKerf^{\perp} = dimV - dimKerf + dim(Kerf \cap Rad(\phi)) = 4 - 3 + 1 = 2$ (nota che $Rad(\phi) \subset Kerf \implies Kerf \cap Rad(\phi) = Rad(\phi)$). Sia Z un supplementare di $Rad(\phi)$ in $Kerf$, allora un vettore che rappresenta f appartiene sicuramente a Z.
Determiniamo una base di $Kerf$: sappiamo che $dimKerf = 3$ e che

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in Kerf$$

Inoltre notiamo che nell'espressione di f non compare d (entrata in alto a destra) quindi una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Kerf$$

ad esempio

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Kerf$$

Per determinare l'ultima matrice che genera una base di $Kerf$ ci basta trovare una matrice indipendente dalle altre due che rispetti la relazione di appartenenza al Ker $(a-2b-c=0)$, ad esempio la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Kerf$$

Quindi abbiamo una base di $Kerf$:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Notiamo inoltre che la prima matrice genera $Rad(\phi)$ e quindi per questioni teoriche

$$Z = Span(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$$

è un supplementare di $Rad(\phi)$.
Per trovare l'ortogonale di $Kerf$ basta trovare $Z^{\perp}$: imponiamo le equazioni

$$\phi(\begin{pmatrix} x & w \\ z & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \left[\begin{pmatrix} x & w \\ z & y \end{pmatrix} \right]_B^{\top} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_B = (x\,y\,z\,w) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (x\,y\,z\,w) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x + z = 0$$

$$\phi(\begin{pmatrix} x & w \\ z & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = \left[\begin{pmatrix} x & w \\ z & y \end{pmatrix} \right]_B^{\top} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]_B = (x\,y\,z\,w) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (x\,y\,z\,w) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2x + 2y + 4z + 2w = 2(x + y + 2z + w) = 0$$

ovvero la condizione di appartenenza a $Z^{\perp}$ è data dal sistema

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + 2z + w = 0 \end{cases}$$

ovvero $z = -x$ e $y = x - w$. Si ha quindi che le matrici che stanno in $Z^{\perp}$ sono del tipo

$$\begin{pmatrix} x & w \\ -x & x-w \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dove il primo pezzo è $Rad(\phi)$ (che è ovviamente ortogonale a $Kerf$) e il secondo è il sottospazio nel quale dobbiamo cercare il vettore che rappresenta f. Deve quindi succedere che

$$\phi(w\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix})$$

($\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ è una matrice scelta a caso): così troviamo w. Si ha che

$$f(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}) = 1 - 0 - 0 = 1$$

e

$$\phi(w\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}) = w(0\,-1\,0\,1)\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = w(0\,-1\,0\,1)\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} = w(1) = w$$

e quindi si ha $w = 1$. Quindi il vettore

$$v = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

rappresenta f: verifichiamolo.

$$\phi(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x & t\\ z & y\end{pmatrix}) = (0\,-1\,0\,1)\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = (1\,-2\,-1\,0)\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = x-2y-z = f(\begin{pmatrix}x & t\\ z & y\end{pmatrix})$$

Infine, dato che abbiamo dovuto dare una condizione su w, la risposta all'ultima domanda è NO, in quanto altrimenti avremmo potuto riscalare il vettore fino a fargli avere forma quadratica uguale a 1.

24.2 Descrizione del gruppo $O(2)$

Sia $V = \mathbb{R}^2$ e $\phi =< \cdot, \cdot >_{2,0}$ (prodotto scalare standard). Allora $O(< \cdot, \cdot >) \cong O(2)$, dove $O(2)$ è il gruppo delle matrici ortogonali di ordine 2, ovvero il gruppo $O(2) = \{M \in M(2, \mathbb{R}) \mid M^\top M = I_2\}$.
Come è fatto questo gruppo? Notiamo che deve essere verificata la condizione

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2+b^2 & ac+bd\\ ac+bd & c^2+d^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

che si traduce in $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ e $ac + bd = 0$. Ricaviamo da queste due condizioni che $c = \pm a$ e $b = \pm d$. Si ha quindi che le matrici appartenenti a $O(2)$ hanno tutte la forma

$$\begin{pmatrix}a & b\\ b & -a\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$$

con $a^2 + b^2 = 1$ (da cui $|a|, |b| \leq 1$). Dato che quest'equazione ci ricorda la celeberrima $cos^2(t) + sin^2(t) = 1$, possiamo affermare che $\exists t \in [0, 2\pi)$ tale che $a = cos(t)$ e $b = sin(t)$. Quindi le nostre matrici diventano della forma

$$\begin{pmatrix}cos(t) & -sin(t)\\ sin(t) & cos(t)\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}cos(t) & sin(t)\\ sin(t) & -cos(t)\end{pmatrix}$$

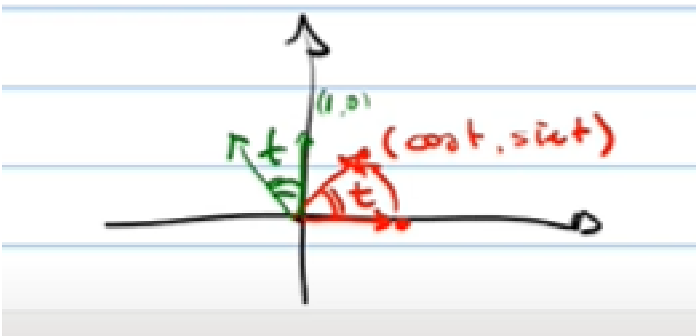
Notiamo che applicando la prima matrice al vettore $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ otteniamo

$$\begin{pmatrix}cos(t) & -sin(t)\\ sin(t) & cos(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}cos(t)\\ sin(t)\end{pmatrix}$$

che è il vettore che rappresenta la rotazione del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ di un angolo t in senso antiorario rispetto all'origine. Se invece la applichiamo al vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} cos(t) & -sin(t) \\ sin(t) & cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -sin(t) \\ cos(t) \end{pmatrix}$$

che è il vettore che rappresenta la rotazione del vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ di un angolo t in senso antiorario rispetto all'origine.



Diamo quindi alla matrice $\begin{pmatrix} cos(t) & -sin(t) \\ sin(t) & cos(t) \end{pmatrix}$ il nome di matrice di rotazione di un angolo t in senso antiorario rispetto all'origine. Otteniamo come conseguenza che il gruppo ortogonale contiene le Rotazioni.
Cosa otteniamo invece se applichiamo la seconda matrice al vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$? Si ha che

$$\begin{pmatrix} cos(t) & sin(t) \\ sin(t) & -cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(t) \\ sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(t) & -sin(t) \\ sin(t) & cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero otteniamo lo stesso risultato che otteniamo quando applichiamo la prima matrice... tuttavia se applichiamo la seconda matrice al vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ si ha

$$\begin{pmatrix} cos(t) & sin(t) \\ sin(t) & -cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sin(t) \\ -cos(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} cos(t) & -sin(t) \\ sin(t) & cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

cioè otteniamo che l'immagine tramite la seconda matrice è la riflessione rispetto alla retta passante per $(0,0)$ e $(cos(\frac{t}{2}), sin(\frac{t}{2}))$. Questa matrice si dice matrice di riflessione rispetto a una retta.
Abbiamo allora che rotazioni e riflessioni sono "trasformazioni ortogonali", in quanto rappresentate da matrici ortogonali e in particolare se $A \in O(2)$ e $detA = 1$, la matrice è una rotazione, mentre se $A \in O(2)$ e $detA = -1$ la matrice è una riflessione.

24.3 Il Piano Iperbolico $\mathbb{R}^2$

Sia $V = \mathbb{R}^2$ e sia $\phi \in PS(V)$, con ϕ rappresentata dalla matrice

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che è la matrice associata a ϕ in una base iperbolica: tale spazio è un piano iperbolico. Notiamo che e_1 e e_2 sono vettori isotropi, infatti

$$\phi(e_1, e_1) = e_1^\top M_B(\phi) e_1 = (1\ 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1\ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\phi(e_2, e_2) = e_2^\top M_B(\phi) e_2 = (0\ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0\ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Notiamo anche però che e_1 e e_2 NON sono ortogonali, infatti

$$\phi(e_1, e_2) = e_1^\top M_B(\phi)e_2 = (1\ 0)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = (1\ 0)\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = 1$$

e dato che $\{e_1, e_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ nessun altro vettore di $\mathbb{R}^2$ (a parte i multipli di e_1 e i multipli di e_2) è isotropo: se infatti $v \in \mathbb{R}^2$ (e $v \notin Span(e_1) \cup Span(e_2)$) si ha che

$$\phi(v, v) = \phi(\alpha e_1 + \beta e_2, \alpha e_1 + \beta e_2) = \alpha^2\phi(e_1, e_1) + \beta^2\phi(e_2, e_2) + 2\alpha\beta\phi(e_1, e_2) = 2\alpha\beta \neq 0$$

Segue dunque che $CI(\phi) = Span(e_1) \cup Span(e_2)$. Sia ora $f \in O(\phi)$, allora $f(e_1), f(e_2) \in CI(\phi)$, infatti

$$\phi(e_1, e_1) = \phi(f(e_1), f(e_1)) = 0$$
$$\phi(e_2, e_2) = \phi(f(e_2), f(e_2)) = 0$$

Ma abbiamo detto che $CI(\phi) = Span(e_1) \cup Span(e_2)$, quindi, dato che f manda basi in basi essendo un isomorfismo, si hanno due possibilità: $f(e_i) = \lambda_i e_i$ o $f(e_i) = \lambda_{3-i}e_{3-i}$ con $i = 1, 2$ e $\lambda_i \in \mathbb{R}/\{0\}$ ($3 - i$ è un metodo carino per indicare che $1 \mapsto 2$ e $2 \mapsto 1$). Si ha quindi che la matrice associata a f nella base canonica è del tipo

$$M_{Can}^{Can}(f) = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

oppure del tipo

$$M_{Can}^{Can}(f) = \begin{pmatrix}0 & \lambda_1\\ \lambda_2 & 0\end{pmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $detM_{Can}^{Can}(f) = \pm 1$, in quanto se A è una matrice che rappresenta un prodotto scalare e M la matrice che rappresenta un'isometria del gruppo ortogonale in una base B, allora $A = M^\top AM$: applicando il determinante si ottiene $detA = det(M^\top AM) = detM^\top detA^\top detM \implies detM^2 = 1 \implies detM = \pm 1$. Ma allora $detM_{Can}^{Can}(f) = \pm\lambda_1\lambda_2 = \pm 1$, da cui $\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2}$: le matrici si riconducono a

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \frac{1}{\lambda}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & \lambda\\ \frac{1}{\lambda} & 0\end{pmatrix}$$

Le matrici con determinante 1 sono dette matrici di rotazione, mentre quelle con determinante -1 sono dette di riflessione.
Controlliamo i punti fissi di queste trasformazioni: la prima matrice è diagonale e gli autovalori sono ovviamente λ e $\frac{1}{\lambda}$. Per l'altra invece cerchiamo il polinomio caratteristico della matrice

$$A = \begin{pmatrix}0 & \lambda\\ \frac{1}{\lambda} & 0\end{pmatrix}$$

$$p_A(t) = \begin{pmatrix}t & -\lambda\\ -\frac{1}{\lambda} & t\end{pmatrix} = t^2 - 1$$

le radici di questo polinomio sono 1 e -1, che sono quindi gli autovalori: i punti fissi in questo caso sono

$$\begin{pmatrix}0 & \lambda\\ \frac{1}{\lambda} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda b\\ \frac{a}{\lambda}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} \iff \begin{cases}a = \lambda b\\ b = \frac{a}{\lambda}\end{cases}$$

ovvero tutti i vettori del tipo $\begin{pmatrix}a\\ \lambda a\end{pmatrix}$ sono fissi, che si traduce in

$$V_1(A) = Span(\begin{pmatrix}1\\ \lambda\end{pmatrix})$$

24.4 Esercizio 2

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio con $dimV = n \geq 2$ e $\phi \in PS(V)$ non degenere. Sia $f \in O(\phi)$, con $dimV_1(f) = n - 1$. Dimostra che $\phi_{|_{V_1(f)}}$ è non degenere.

Soluzione: possiamo assumere che $f \neq id_V$ (infatti se fosse $f = id_V$, si avrebbe $dimV_1(f) = n$); supponiamo per assurdo che $\phi_{|_{V_1(f)}}$ sia degenere, allora $Rad(\phi_{|_{V_1(f)}}) \neq 0$. Notiamo

però che $Rad(\phi_{|_{V_1(f)}}) = V_1(f) \cap V_1(f)^{\perp}$. Tuttavia $dimV_1(f)^{\perp} = dimV - dimV_1(f) + dim(Rad(\phi) \cap V_1(f)) = n - n + 1 = 1$ ($Rad(\phi) = \{0\}$ per ipotesi) e dunque, dato che $V_1(f) \cap V_1(f)^{\perp} \neq \{0\}$, si deve avere $V_1(f)^{\perp} \subset V_1(f)$ (l'intersezione ha dimensione almeno 1 e $dimV_1(f)^{\perp} = 1$) e dunque $Rad(\phi_{|_{V_1(f)}}) = V_1(f)^{\perp} = Span(v_0)$. Esiste quindi $0 \neq v_0 \in V$ tale che $V_1(f)^{\perp} = Span(v_0)$. Consideriamo la forma quadratica di v_0: $q_{\phi}(v_0) = \phi(v_0, v_0)$; dato che $v_0 \in V_1(f)^{\perp} \subset V_1(f)$, si ha anche che $v_0 \in V_1(f)$ e dunque $q_{\phi}(v_0) = 0$, ovvero $v_0 \in CI(\phi)/\{0\}$. Ma in tutto ciò f è un'isometria e quindi $\phi(v_0, v_0) = \phi(f(v_0), f(v_0)) = \phi(f(v_0), v_0)$. Tuttavia ϕ è non degenere e quindi per questioni teoriche si ha che $V_1(f) = (V_1(f)^{\perp})^{\perp} = (Span(v_0))^{\perp} = v_0^{\perp}$. Sia U un supplementare di $Span(v_0) = V_1(f)^{\perp}$ in $V_1(f)$, ma allora $\phi_{|_U}$ è non degenere (in quanto U è supplementare del radicale). Inoltre U è f-invariante in quanto $U \subset V_1(f)$ e $dimU^{\perp_\phi} = dimV - dimU + dim(Rad(\phi) \cap U) = dimV - dimU$. Da una parte si ha $dimU^{\perp_\phi} = 2$ in quanto $dimU = dimV_1(f) - 1$ (supplementare di un sottospazio di dimensione 1) e $dimV_1(f) = n - 1$, quindi $dimU = n - 2$, da cui $dimU^{\perp_\phi} = dimV - dimU = n - n + 2 = 2$. Poi $v_0 \in U^{\perp} \cap CI(\phi)$ ($v_0 \in U^{\perp}$ in quanto $v_0 \in Rad(\phi_{|_{V_1(f)}})$ e quindi $\phi_{|_{V_1(f)}}(v_0, u) = 0 \ \forall u \in U$). Ma allora $U^{\perp_\phi}$ è un piano iperbolico! (ha dimensione 2, non è anisotropo in quanto contiene v_0 e $\phi_{|_{U^{\perp_\phi}}}$ è non degenere in quanto $\phi_{|_U}$ è non degenere e anche ϕ lo è).
Dato che f è un'isometria del gruppo ortogonale, anche la sua restrizione a un piano iperbolico lo è e quindi $f_{|_{U^{\perp_\phi}}} \in O(\phi_{|_{U^{\perp_\phi}}})$: una base iperbolica di $U^{\perp_\phi}$ è data da v_0, v_1, con $v_1 \in U^{\perp_\phi}$ e $v_1 \notin Span(v_0)$. Dato che $f_{|_{U^{\perp_\phi}}}$ è una restrizione di f, anche essa fissa v_0, ovvero $f_{|_{U^{\perp_\phi}}}(v_0) = v_0$. La matrice $M_B(f_{|_{U^{\perp_\phi}}})$ è del tipo visto sopra (paragrafo 24.3): in particolare la matrice associata è

$$M_B(f_{|_{U^{\perp_\phi}}}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

con $\lambda = 1$ (infatti se fosse dell'altra forma non fisserebbe vettori arbitrari). Si ha quindi che

$$M_B(\phi_{|_{U^{\perp_\phi}}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

ovvero $f_{|_{U^{\perp_\phi}}} = id_{|_{U^{\perp_\phi}}}$, ma ciò è assurdo in quanto $V = U \oplus^{\perp} U^{\perp_\phi}$ (ϕ è non degenere), $U \subset V_1(f)$ e $f_{|_{U^{\perp_\phi}}} = id_{|_{U^{\perp_\phi}}}$, ovvero f è l'identità (fissa U e $U^{\perp_\phi}$), in contraddizione con quanto detto all'inizio.

Osservazione: Tutto questo lungo esercizio è in realtà un enunciato importantissimo che serve a dimostrare una proposizione: se (V, ϕ) è un $\mathbb{K}$-spazio di dimensione n, f è un'isometria del gruppo ortogonale tale per cui $V_1(f)$ ha dimensione $n - 1$ e ϕ è non degenere, allora $\phi_{|_{V_1(f)}}$ è non degenere. Questo implica che se ϕ è non degenere e $f \in O(\phi)$, allora $V_1(f)$ ha dimensione $n - 1 \iff f$ è una riflessione ortogonale a $V_1(f)$ (la freccia $\Longleftarrow$ è ovvia dalla teoria, dalla definizione di riflessione ortogonale).

25 Esercitazione 06-05-2022

25.1 Esercizio 1

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio di dimensione n e sia $\phi \in PS(V)$. Si dimostri che se ϕ è anisotropo e $f \in O(\phi)$, allora f è composizione di $n - dimV_1(f)$ riflessioni ortogonali.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che se $h, g \in End(V)$, allora $V_1(g \circ h) \supset V_1(g) \cap V_1(h)$ (se un punto è fisso per due endomorfismi, è fisso anche per la loro composizione) e in particolare se g è una riflessione ortogonale sappiamo che $dimV_1(g) = n-1$, da cui $dim(V_1(g) \cap V_1(h)) = dimV_1(h)$ o $dim(V_1(g) \cap V_1(h)) = dimV_1(h) - 1$ (nel primo caso $V_1(h) \subset V_1(g)$ e nel secondo $V_1(h) \cap V_1(g) \nsubseteq V_1(g)$). Segue quindi che

$$dimV_1(h) - 1 \leq dim(V_1(h) \cap V_1(g)) \leq dimV_1(h)$$

Adesso, se f è composizione di k riflessioni ortogonali $f = \rho_1 \circ ... \circ \rho_k$ (visto a teoria), allora $dimV_1(f) \geq dim(V_1(\rho_1 \circ ... \circ \rho_{k-1})) - 1$ e reiterando

$$dimV_1(f) \geq dim(V_1(\rho_1 \circ ... \circ \rho_{k-1})) - 1 \geq ... \geq n - 1 - (k-1) = n - k$$

e dunque $k \geq n - dimV_1(f)$ (abbiamo una disuguaglianza dall'alto).
Procediamo con la dimostrazione per induzione su $n - d$ (con $d = dimV_1(f)$)

$\cdot$ $d = 0 \iff n - d = n$ e quindi $dimV_1(f) = n$, quindi f lascia invariati tutti i punti, e quindi f è l'identità, che è composizione di 0 riflessioni.

$\cdot$ $d = 1 \iff n - d = n - 1$ e quindi, per quanto visto nell'ultimo esercizio della scorsa esercitazione, f è una riflessione, che è "composizione di sé stessa".

$\cdot$ Assumiamo la tesi vera per ogni isometria f del gruppo ortogonale tale per cui $dimV_1(f) = d+1$: si ha che $n - dimV_1(f) = n - d - 1$. Dal fatto che ϕ è anisotropo segue che ϕ è non degenere e quindi posso scrivere V come somma diretta ortogonale di due sottospazi, in particolare $V = V_1(f) \oplus^\perp V_1(f)^\perp$ (nota che $V_1(f)^\perp$ è non banale). Consideriamo $w \in V_1(f)^\perp$: dato che la somma di sopra è diretta $w \notin V_1(f)$, ovvero w non è un punto fisso, da cui $f(w) - w \neq 0$. Sappiamo che ϕ è anisotropo e quindi $f(w) - w \notin CI(\phi)$: ha senso quindi definire la riflessione ρ relativa al vettore $f(w) - w$: $\rho = \rho_{f(w)-w}$ e definiamo poi $g = \rho \circ f$: vogliamo far vedere per terminare la dimostrazione che $dimV_1(g) = dimV_1(f) + 1$ (e il resto segue dall'ipotesi induttiva).
Osserviamo che dato un qualsiasi $v \notin CI(\phi)$ e un $u \in V$, $\rho_v(u) = u - 2c(v,u)v$ (deriva dal fatto che possiamo scrivere $V = v^\perp \oplus^\perp Span(v)$): usando questa relazione si ha

$$g(w) = \rho(f(w)) = f(w) - 2c(f(w)-w, f(w))(f(w)-w) = f(w) - 2\frac{\phi(f(w)-w, f(w))}{\phi(f(w)-w, f(w)-w)}(f(w)-w)$$

Notiamo ora che $\phi(f(w)-w, f(w)) = \phi(f(w), f(w)) - \phi(w, f(w)) = \phi(w,w) - \phi(w, f(w))$ (dove il passaggio $\phi(f(w), f(w)) = \phi(w,w)$ è giustificato dal fatto che f sia un'isometria di $O(V)$) e che $\phi(f(w)-w, f(w)-w) = \phi(f(w), f(w)) - 2\phi(f(w), w) + \phi(w,w) = 2\phi(w,w) - 2\phi(f(w), w) = 2\phi(f(w)-w, f(w))$ (ovvero il denominatore del coefficiente di Fourier è il doppio del numeratore): otteniamo $g(w) = \rho(f(w)) = f(w) - 2(\frac{1}{2}(f(w)-w)) = f(w) - f(w) + w = w$ e quindi $w \in V_1(g)$ (ma non a $V_1(f)$). Per quanto visto all'inizio dell'Esercizio segue allora che $V_1(g) = V_1(\rho \circ f) \supset V_1(\rho) \cap V_1(f)$. Ricordiamo però che $w \in V_1(f)^\perp$: siccome $V_1(f)$ è f-invariante e $f \in O(V)$, allora anche $V_1(f)^\perp$ è f-invariante e quindi $f(w) \in V_1(f)^\perp$: essendo esso un sottospazio $f(w) - w \in V_1(f)^\perp \implies V_1(f) = (V_1(f)^\perp)^\perp \subset (f(w)-w)^\perp = V_1(\rho)$ (è la riflessione ortogonale a $f(w) - w$). Ricapitolando

$$V_1(g) \supset V_1(\rho) \cap V_1(f) = V_1(f)$$

(abbiamo appena verificato che $V_1(f) \subset V_1(\rho)$) da cui segue che $dimV_1(f) \geq d+1$. Dato che $g = \rho \circ f$, $f = \rho^{-1} \circ g = \rho \circ g$ (basta ricordare che $\rho^2 = id_V$): quindi $V_1(f) \supset V_1(\rho) \cap V_1(g)$ e dato che $V_1(f) \subset V_1(\rho)$ e $V_1(f) \subset V_1(g)$, segue che $V_1(f) \subset V_1(\rho) \cap V_1(g)$ e quindi per doppia inclusione si ha un'uguaglianza:

$$V_1(f) = V_1(\rho) \cap V_1(g)$$

e quindi

$$dimV_1(f) = d+1 = dim(V_1(\rho) \cap V_1(g)) = dim(V_1(\rho)) + dim(V_1(g)) - dim(V_1(\rho) + V_1(g)) =$$

$$= n - 1 + dim(V_1(g)) - n = dim(V_1(g)) - 1 \Longrightarrow dim(V_1(g)) = d+2$$

segue per ipotesi induttiva che $g = \rho_1 \circ ...\rho_{n-d-2}$ ovvero g è composizione di $n-d-2$ riflessioni ortogonali e che quindi $f = \rho \circ g = \rho \circ \rho_1 \circ ...\rho_{n-d-2}$ è composizione di $n-d-1$ riflessioni ortogonali.

Osservazione: segue come corollario il **teorema di Cartan-Dieudonné** nel caso anisotropo: se ϕ è un prodotto scalare anisotropo, allora ogni isometria del gruppo ortogonale si scrive come composizione di al più n riflessioni ortogonali.

25.2 Esercizio 2

Sia V uno spazio reale e sia $\phi \in PS(V)$. Si dimostri che ϕ è semidefinito se e solo se $CI(\phi) = Rad(\phi)$ (nella dimostrazione usiamo semidefinito positivo, è analogo il caso seminegativo).

Dimostrazione. Mostriamo le due frecce separatamente:

($\Longrightarrow$) Sia U un supplementare di $Rad(\phi)$ in V, ovvero $V = U \oplus^{\perp} Rad(\phi)$; sappiamo inoltre dalla teoria che $\phi_{|_U}$ è non degenere (lo spazio $(U, \phi_{|_U})$ è isometrico a $({}^{V}/_{Rad(\phi)}, \bar{\phi})$ lo spazio canonicamente non degenere associato a (V, ϕ)): quindi se ϕ è semidefinito, anche $\phi_{|_U}$ lo è, ma allora si deve avere che $i_+(\phi_{|_U}) + i_-(\phi_{|_U}) + i_0\phi_{|_U} = i_+(\phi_{|_U}) = dimU$ ($\phi_{|_U}$ non assume valori negativi e quindi $i_-(\phi_{|_U}) = 0$ e $i_0(\phi_{|_U}) = 0$ per non degenericità)e quindi $\phi_{|_U}$ è definito positivo e quindi anisotropo per quanto detto a teoria. Ma ovviamente $CI(\phi_{|_U}) = CI(\phi) \cap U$ (i vettori isotropi di $\phi_{|_U}$ sono i vettori che sono isotropi rispetto a ϕ e che appartengono a U) $\Longrightarrow CI(\phi) \cap U = \{0\}$ e quindi, dato che $V = U \oplus^{\perp} Rad(\phi)$, necessariamente $CI(\phi) \subset Rad(\phi)$. L'altra inclusione è ovvia per questioni teoriche e quindi si ha che. $CI(\phi) = Rad(\phi)$.

($\Longleftarrow$) Mostriamo ora che se $CI(\phi) = Rad(\phi)$ allora ϕ è semidefinito. Sia U un supplementare di $Rad(\phi)$ in V come sopra. Sia B_U una base di U e sia $B_{Rad(\phi)}$ una base di $Rad(\phi)$: l'insieme $B = B_U \cup B_{Rad(\phi)}$ è una base adattata alla somma diretta di V. Consideriamo allora la matrice $M_B(\phi)$: essa sarà una matrice a blocchi del tipo

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} M_{B_U}(\phi_{|_U}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i 3 blocchi di zeri sono dovuti al fatto che la base relativa al radicale annulli tutte le entrate). Sappiamo che $CI(\phi_{|_U}) = CI(\phi) \cap U = Rad(\phi) \cap U = \{0\}$ e dunque, per quanto visto a teoria $\phi_{|_U}$ è definito positivo. Ma allora ϕ è semidefinito in quanto esisterà una base D per cui $M_D(\phi_{|_U}) = I_p$, con $p = dimU$ (ovvero tutti i vettori di U hanno forma quadratica positiva), ed esistono vettori isotropi.

25.3 Esercizio 3

Sia $V = M(n, \mathbb{R})$ e siano $\phi(A, B) = tr(A \cdot B)$ e $\psi(A, B) = tr(A \cdot B^{\top})$ (notiamo che $\phi(A, B^{\top}) = \psi(A, B)$). Mostrare che ϕ e ψ NON sono isometrici.

Dimostrazione. Essendo ϕ e ψ due prodotti scalari reali, vogliamo usare la segnatura per mostrare la tesi (ricordiamo che due prodotti scalari reali sono isometrici se e solo se le loro segnature sono uguali: conseguenza del teorema di Sylvester). Cominciamo a calcolare la segnatura di ψ.

Consideriamo $A \in M(n, \mathbb{R})$ e sia $\psi(A, A) = tr(A \cdot A^{\top})$: come è fatto l'$i$-esimo elemento della diagonale di $A \cdot A^{\top}$? Per definizione esso è il prodotto tra l'i-esima riga di A e l'i-esima colonna di $A^{\top}$, ma l'i-esima colonna di $A^{\top}$ è proprio l'i-esima riga di A e quindi si ottiene che

$$(A \cdot A^{\top})^i_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq 0$$

(si ha uguaglianza se e solo se tutta l'i-esima riga di A è nulla). Otteniamo quindi che l'unica matrice B tale per cui $\psi(B, B) = 0$ è la matrice nulla, mentre per ogni altra matrice A si ha che $\psi(A, A) > 0$, ovvero ψ è definito positivo. Si ha quindi che la segnatura di ψ è

$$\sigma(\psi) = (n^2,\ 0,\ 0)$$

Troviamo ora la segnatura di ϕ: abbiamo notato nel testo che $\phi(A, B^\top) = \psi(A, B)$: consideriamo allora $A \in S_n(\mathbb{R})$ non nulla; si deve avere $\phi(A, A) = \phi(A, A^\top) = \psi(A, A) > 0$. Si ha così che ϕ è definito positivo su tutto lo spazio delle matrici simmetriche e quindi $i_+(\phi) \geq dim S_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$. Cosa succede però se $A \in A_n(\mathbb{R})$? $\phi(A, A) = \phi(A, -A^\top) = -\phi(A, A^\top) = -\psi(A, A) < 0$: ma allora $i_-(\phi) \geq dim A_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$. Notiamo ora che $i_+(\phi) + i_-(\phi) + i_0(\phi) = n^2$ e per quanto detto sopra $i_+(\phi) + i_-(\phi) \geq \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2$: dato che $i_0(\phi) \geq 0$ (in particolare ci interessa il fatto che non sia negativo) si deve avere per forza $i_+(\phi) = \frac{n(n+1)}{2}$ e $i_-(\phi) = \frac{n(n-1)}{2}$, che determina completamente la segnatura

$$\sigma(\phi) = (\frac{n(n+1)}{2},\ \frac{n(n-1)}{2},\ 0)$$

Dato che le segnature dei due prodotti scalari sono diverse, essi non sono isometrici per quanto visto a teoria.

25.4 Classi di congruenza di Prodotti Scalari Reali

· $dim V = 1$: ci sono tre possibili prodotti scalari (a meno di isometria), determinati dalle matrici 1×1: (1) che è il definito positivo, (-1) che è il definito negativo, (0) che è il prodotto scalare nullo.

· $dim V = 2$: ci sono sei possibili prodotti scalari (a meno di isometria), determinati dalle matrici 2×2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che sono quelli non degeneri e

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che sono quelli degeneri.

· $dim V = 3$: ci sono 10 possibili prodotti scalari (a meno di isometria), determinati dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che sono quelli non degeneri e

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che sono quelli degeneri.

· Come possiamo generalizzare questi numeri al caso generico $dim V = n$? Ovvero, come rispondiamo alla domanda: "quanti prodotti scalari ci sono in uno spazio di dimensione n"? Notiamo che il calcolo è puramente combinatorio (non dipende in alcun modo dalla geometria). Ragioniamo in questo modo: nel caso non degenere il numero complessivo di prodotti scalari è semplicemente $n + 1$ in quanto ogni prodotto scalare è completamente determinato dalla sua segnatura: quante segnature possibili ci sono? La risposta a questa domanda è la stessa che diamo alla domanda "quante soluzioni intere non negative ha l'equazione $a + b = n$?" (nota che $i_+ = a$ e $i_- = b$) e sappiamo che il numero di soluzioni di un'equazione del genere è un semplice "stars and bars":

$$\#\{\text{soluzioni di } a + b = n\} = \binom{n+1}{1} = n + 1$$

Cosa succede nel caso degenere? Procediamo per gradi: consideriamo i prodotti scalari per cui $i_0 = 1$ (ovvero hanno un solo 0 sulla diagonale): rifacendoci al caso di prima, il numero di prodotti scalari è uguale al numero di soluzioni intere non negative dell'equazione $a + b + 1 = n \iff a + b = n - 1$, che ha n soluzioni. Procedendo in maniera induttiva otteniamo che per i prodotti scalari tali per cui $i_0 = k$ $(0 \leq k \leq n)$ il numero di essi (a meno di isometria) è $n - k + 1$: spaziando su ogni k otteniamo che

$$\#\{\text{prodotti scalari in uno spazio di dimensione } n \text{ a meno di isometria}\} = 1+2+\cdots+n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

25.5 Metodo di Jacobi

Sia V uno spazio reale e siano $W \subset W' \subset V$ con W e W' sottospazi vettoriali. Assumiamo che $dimW' = dimW + 1$ e che $\phi_{|W}$ è non degenere. Sia A la matrice che rappresenta $\phi_{|W}$ nella base B e sia A' la matrice che rappresenta $\phi_{|'_W}$ nella base $B' = B \cup \{w'\}$. C'è una relazione tra A e A': in particolare si ha che A' si ottiene da A orlando (infatti tutte le entrate della sottomatrice di ordine $dimW \times dimW$ sono le stesse di A):

$$A' = \begin{pmatrix} A & * \\ * & \phi(w', w') \end{pmatrix}$$

Consideriamo $detA'$. Esso è 0 se e solo se $w' \in Rad(\phi)$ (infatti tutta l'ultima colonna di A' sarebbe nulla, mentre la matrice A è invertibile dato che per ipotesi $\phi_{|W}$ è non degenere). In particolare conviene scrivere la precedente nel modo

$$detA' = 0 \iff \frac{detA'}{detA} = 0$$

Se invece $detA' \neq 0$, allora $w' \notin Rad(\phi)$: possiamo supporre, a meno di cambiare w', che $Span(w') \perp W$: la matrice A' diventa così

$$A' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \phi(w', w') \end{pmatrix}$$

Ma questa matrice è diagonale a blocchi, quindi per la teoria $detA' = detA \cdot \phi(w', w')$, ovvero

$$\phi(w', w') = \frac{detA'}{detA}$$

Scegliamo ora una base ortonormale di W, ovvero tale per cui

$$A = \begin{pmatrix} I_{i_+(\phi_{|W})} & 0 \\ 0 & I_{i_-(\phi_{|W})} \end{pmatrix}$$

Notiamo che $detA = (-1)^{i_-(\phi_{|W})}$ Ma allora si ha che

$$\phi(w', w') = \frac{detA'}{detA} \begin{cases} > 0 \iff i_+(\phi_{|'_W}) = i_+(\phi_{|W}) + 1 \\ < 0 \iff i_-(\phi_{|'_W}) = i_-(\phi_{|W}) + 1 \end{cases}$$

Notiamo che ha senso in quanto se $i_+(\phi_{|'_W}) = i_+(\phi_{|W}) + 1$ allora $i_-(\phi_{|'_W}) = i_-(\phi_{|W})$ e quindi il rapporto dei determinanti è un rapporto di numeri negativi, che è positivo (stesso ragionamento per il $<$).
Consideriamo allora una bandiera di sottospazi $V_1 \subset V_2 \subset ... \subset V_n = V$ (con $dimV_i = i$) tale per cui $\phi_{|V_i}$ è non degenere $\forall i < n$. Iteriamo quindi il discorso di prima e cerchiamo di capire dalla variazione di segno dei determinanti delle matrici dei vari prodotti scalari il valore di i_- e di i_+. Cerchiamo di capire meglio con un esempio.

SPIEGAZIONE 2 (ESERCITAZIONE DEL 09/05/22, a mio avviso più comprensibile): Sia V uno spazio reale tale che esiste una bandiera $V_1 \subset V_2 \subset ... \subset V_n = V$ con $V_i = Span(v_1, ..., v_i)$ e tale per cui $\forall i < n$ $\phi_{|V_i}$ è non degenere (se ϕ è degenere non ci sono problemi). Sia $B_i = \{v_1, ..., v_i\}$ e sia $M = M_{B_n}(\phi)$ e indichiamo con m_i il determinante dell'i-esimo minore principale di M, ovvero $m_i = det(M_{B_i}(\phi_{|V_i}))$. Notiamo che $sgn(m_i) = (-1)^{i_-(\phi_{|V_i})}$ (la matrice è diagonale con soli 1 e -1 sulla diagonale). Per di più vale che $i_*(\phi_{|V_i}) \leq i_*(\phi_{|V_{i+1}}) \leq i_*(\phi_{|V_i}) + 1$ con $* \in \{+, -\}$: la prima disuguaglianza è vera per contenimento, la seconda invece vale perché $i_+(\phi_{|V_i}) + i_-(\phi_{|V_i}) = i$ e quindi gli indici di negatività e positività, nel complessivo aumentano di 1, ovvero uno rimane invariato e l'altro aumenta. Quindi, se $sgn(m_i) \neq sgn(m_{i+1})$, allora necessariamente è cambiata la parità di i_-, ovvero $i_-(\phi_{|V_{i+1}}) = i_-(\phi_{|V_i}) + 1$ e i_+ rimane invariato. Di contro, se il segno non cambia è i_+ a cambiare. Quindi leggendo i minori principali della matrice che rappresenta ϕ possiamo capire la segnatura di ϕ. Possiamo quindi caratterizzare i_+ e i_- nel seguente modo:

$$\begin{cases} i_+ = \#\{\text{permanenze di segno nel passaggio tra } m_i \text{ e } m_{i+1} + \delta_1^{sgn(m_1)}\} \\ i_- = \#\{\text{cambi di segno nel passaggio tra } m_i \text{ e } m_{i+1} + \delta_{-1}^{sgn(m_1)} \end{cases}$$

dove

$$\delta_1^{sgn(m_1)} = \begin{cases} 1 \iff sgn(m_1) = 1 \\ 0 \iff sgn(m_1) \neq 1 \end{cases}$$

e

$$\delta_{-1}^{sgn(m_1)} = \begin{cases} 1 \iff sgn(m_1) = -1 \\ 0 \iff sgn(m_1) \neq -1 \end{cases}$$

25.6 Esercizio 4

Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $\phi \in PS(V)$ rappresentato dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

in una certa base B. Si determini la segnatura di ϕ.

Soluzione: Utilizzando il metodo di sopra, dobbiamo trovare i determinanti dei minori principali (consideriamo la bandiera $Span(e_1) \subset Span(e_1, e_2) \subset Span(e_1, e_2, e_3)$).
Il primo minore che troviamo è quello 1×1 in alto a sinistra, rappresentato da $A = (1)$: ovviamente $det(1) = 1$.
Il secondo minore che troviamo è quello 2×2 in alto a sinistra, rappresentato dalla matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il suo determinante è

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0$$

e quindi, per quanto detto sopra $i_+(A') = i_+(A) + 1 = 2$.
Il determinante di tutta la matrice è invece

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 6 - 1 - 3 = 2 > 0$$

Siccome non ci sono cambiamenti di segni (e ϕ è non degenere) si ha che $i_- = 0$ e $i_+ = 3$. Il punto è che stiamo cercando spazi sempre più grandi e vediamo che su ognuno (in questo caso) il prodotto scalare è definito positivo.

Osservazione: I minori principali sono tutti positivi (o negativi) se e solo se ϕ è definito positivo.

25.7 Esercizio 5

Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $\phi \in PS(V)$ rappresentato dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

in una certa base B. Si determini la segnatura di ϕ.

Soluzione: In questo caso non possiamo considerare la bandiera classica $Span(e_1) \subset Span(e_1, e_2) \subset Span(e_1, e_2, e_3)$ in quanto otterremmo che il determinante di ϕ ristretto a $Span(e_1)$ è nullo. Consideriamo allora la bandiera $Span(e_3) \subset Span(e_2, e_3) \subset Span(e_1, e_2, e_3)$: leggiamo i minori principali partendo dal basso.
Il primo minore che troviamo è quello 1×1 in basso a destra, rappresentato da $A = (2)$: ovviamente $det(2) = 2 > 0$.
Il secondo minore che troviamo è quello 2×2 in basso a destra, rappresentato dalla matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il suo determinante è

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0$$

e quindi, per quanto detto sopra $i_+(A') = i_+(A) + 1 = 2$. Il determinante di tutta la matrice è invece

$$det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -5 < 0$$

Questo ci dice che c'è almeno un sottospazio in cui ϕ è definito negativo: $i_-(\phi) \geq 1$. Dato che $i_+ + i_- = 3$ si deve avere per forza che la segnatura è $\sigma(\phi) = (2, 1, 0)$.

26 Esercitazione 09-05-2022

26.1 Esercizio 1

Sia V uno spazio reale e sia $\phi \in PS(V)$ definito da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

in una certa base. Determinare $\sigma(\phi)$.

Soluzione: Osserviamo che $\phi_{|_{Span(e_2)}}$ è definito negativo, infatti

$$\phi(e_2, e_2) = (0\ 1\ 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$

e ovviamente per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ non nullo si ha che $\phi(\lambda e_2, \lambda e_2) = \lambda^2 \phi(e_2, e_2) = -\lambda^2 < 0$. Similmente $\phi_{|_{Span(e_3)}}$ è definito positivo, infatti

$$\phi(e_3, e_3) = (0\ 0\ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$$

e ovviamente per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ non nullo si ha che $\phi(\lambda e_3, \lambda e_3) = \lambda^2 \phi(e_3, e_3) = 3\lambda^2 > 0$, ovvero $i_+(\phi), i_-(\phi) \geq 1$ (esistono due sottospazi di dimensione 1 tali per cui la restrizione di ϕ su essi è una volta definita positiva e un'altra definita negativa). Notiamo ora che

$$detA = det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1 > 0$$

ovvero $i_0(\phi) = 0$. Per altro notiamo che il minore

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ha determinante negativo e quindi, per quanto afferma il metodo di Jacobi presentato nella scorsa esercitazione, si evince che i_-, passando dal minore a tutta la matrice, aumenta e quindi diventa maggiore o uguale di 2. Si ha così che $\sigma(\phi) = (1, 2, 0)$.

Osservazione: $H = Span(e_1, e_2)$ è un piano iperbolico in quanto ha dimensione 2 e la matrice della restrizione assume la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(sono le prime due righe e le prime due colonne di A). Ovviamente $e_1 \in CI(\phi_{|_H})$ in quanto l'elemento di posto 1,1 è 0.

26.2 Esercizio 2

Sia V uno spazio reale e sia $\phi \in PS(V)$ definito da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

in una certa base. Determinare $\sigma(\phi)$.

Soluzione: Utilizzando il metodo di Jacobi si ha che, considerando i minori da quello in alto a sinistra a quello in basso a destra

$$det(1) = 1 > 0$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 4 = -1 < 0$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 1(6-4) - 2(4-2) + 1(4-3) = -1 < 0$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 1 > 0$$

Scrivendo i segni in una sorta di stringa otteniamo

$$+ \quad - \quad - \quad +$$

ovvero $sgn(m_1) = 1$ (che va ad aggiungersi ad eventuali conti che faremo con $i_+(\phi)$) e possiamo contare una permanenza e due cambi di segno: si ha quindi che $i_+(\phi) = 1 + 1 = 2$ (uno è dato da $sgn(m_1) = 1$ e l'altro dalla permanenza) e che $i_-(\phi) = 2$ (che sono i due cambi di segno): la segnatura è così $\sigma(\phi) = (2, 2, 0)$.

26.3 Esercizio 3

Sia V uno spazio reale e sia $\phi \in PS(V)$ definito da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

in una certa base. Determinare $\sigma(\phi)$.

Soluzione: Utilizzando il metodo di Jacobi si ha che, considerando i minori da quello in basso a destra a quello in alto a sinistra (perché il minore 1×1 in alto a sinistra è 0)

$$det(2) = 2 > 0$$

$$det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 - 1 = -1 < 0$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -1 - 6 + 2 = -5 < 0$$

$$det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 9 > 0$$

Scrivendo i segni in una sorta di stringa otteniamo

$$+ \quad - \quad - \quad +$$

ovvero $sgn(m_1) = 1$ (che va ad aggiungersi ad eventuali conti che faremo con $i_+(\phi)$) e possiamo contare una permanenza e due cambi di segno: si ha quindi che $i_+(\phi) = 1 + 1 = 2$ (uno è dato da $sgn(m_1) = 1$ e l'altro dalla permanenza) e che $i_-(\phi) = 2$ (che sono i due cambi di segno): la segnatura è così $\sigma(\phi) = (2, 2, 0)$.

Osservazione: Se non siamo nelle ipotesi del metodo di Jacobi il metodo standard per il calcolo delle segnature è "trovare una base ortogonale con Gram-Schmidt". È però vero che se ϕ è degenere e conosciamo $Rad(\phi)$, ci basta trovare un supplementare U di $Rad(\phi)$ e dato che sappiamo che $\phi_{|_U}$ è non degenere si trova la segnatura di $\phi_{|_U}$ (con Jacobi) e, per la teoria, sappiamo che $\sigma(\phi) = \sigma(\phi_{|_U}) + (0, 0, dimRad(\phi))$ (se $V = A \oplus^{\perp} B$ allora $\sigma(\phi) = \sigma(\phi_{|_A}) + \sigma(\phi_B)$).

26.4 Esercizio 4

Sia V uno spazio reale e sia $\phi \in PS(V)$ definito da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

in una certa base. Determinare $\sigma(\phi)$.

Soluzione: Utilizzando il metodo di Jacobi consideriamo la bandiera $Span(e_2) \subset Span(e_2, e_3) \subset Span(e_2, e_3, e_4) \subset V$: otteniamo

$$det(2) = 2 > 0$$

$$det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0$$

$$det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

Scrivendo i segni in una sorta di stringa otteniamo

$$+ \quad + \quad - \quad -$$

ovvero $sgn(m_1) = 1$ (che va ad aggiungersi ad eventuali conti che faremo con $i_+(\phi)$) e possiamo contare due permanenze e un cambio di segno: si ha quindi che $i_+(\phi) = 1 + 2 = 3$ (uno è dato da $sgn(m_1) = 1$ e l'altro dalle permanenze) e che $i_-(\phi) = 1$ (che è il cambio di segno): la segnatura è così $\sigma(\phi) = (3, 1, 0)$.

26.5 Esercizio 5

Sia $(\mathfrak{Sl}_2(\mathbb{R}), K_2)$ lo spazio delle matrici 2×2 a traccia nulla con la forma di Killing (definito in 20.4). Sia

$$B = \left\{ h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

una base di $\mathfrak{Sl}_2(\mathbb{R})$. Determinare l'indice di Witt di K_2.

Soluzione: La matrice della forma di Killing in questa base è

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

come visto in 20.4. Notiamo che, per quanto visto a teoria, l'indice di Witt di K_2 ha la proprietà

$$W(K_2) \leq \frac{dimV}{2} = \frac{3}{2} < 2$$

(la dimensione del radicale è ovviamente 0 in quanto il prodotto scalare di sopra è non degenere) e allora $W(K_2) \leq 1$ (quindi o è zero o è 1). Di contro, notiamo che considerando $Span(x)$ si ha che

$$K_2(\lambda x, \mu x) = \lambda\mu K_2(x, x) = 0$$

ovvero $Span(x) \subset CI(K_2)$: abbiamo quindi trovato un sottospazio di dimensione 1 all'interno del cono isotropo e date le premesse di prima, si ha necessariamente che $W(K_2) = 1$.

Osservazione: possiamo decomporre $\mathfrak{Sl}_2$ come

$$\mathfrak{Sl}_2 = Span(h) \oplus Span(x, y)$$

dove $Span(h)$ è la parte anisotropa, e infatti

$$K_2(h,h) = 8 \neq 0$$

e $Span(x,y)$ è un piano iperbolico, infatti è non anisotropo in quanto contiene x, è non degenere in quanto la matrice che rappresenta K_2 ristretto a questo sottospazio è il minore 2×2

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2, e infine $dimSpan(x,y) = 2$.

26.6 Indice di Witt della forma di Killing

Consideriamo lo spazio $(\mathfrak{Sl}_n(\mathbb{K}), K_n)$ definito in 20.4. Ricordiamo che $dim(\mathfrak{Sl}_n) = n^2 - 1$. Eslcudiamo in primo luogo il caso in cui n sia primo e $char\mathbb{K} = n$: in questo caso infatti $K_n \equiv 0$.
Consideriamo

$$B = \{E_{22} - E_{11}, ..., E_{nn} - E_{11}, E_{12}, E_{21}, ..., E_{ij}, E_{j,i}\}$$

con $i < j$: otteniamo una base di $\mathfrak{Sl}_n(\mathbb{K})$, infatti i primi elementi sono $n-1$ mentre i restanti sono $\frac{n(n-1)}{2}$ coppie: in totale abbiamo $n(n-1) + n - 1 = n^2 - 1 = dim(\mathfrak{Sl}_n(\mathbb{K}))$. Come è fatta la matrice associata a K_n in tale base? Ricordando che $K_n(A,B) = 2ntr(A,B)$ si ha che

$$M_B(K_n) = 2n \begin{pmatrix} 2 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 2 & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & 1 & 0 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dove ricordiamo che

$$E_{ij} \cdot E_{hk} = \begin{cases} 0 & j \neq h \\ E_{ik} & j = h \end{cases}$$

e quindi i primi $n-1$ elementi sulla diagonale sono effettivamente $2ntr((E_{kk} - E_{11}) \cdot (E_{kk} - E_{11})) = 2n(tr(E_{kk} \cdot E_{kk}) - 2tr(E_{kk} \cdot E_{11}) + tr(E_{11} \cdot E_{11}) = 2n(tr(E_{kk}) - 0 + tr(E_{11})) = 2n(1+1) = 2n \cdot 2$.
Sappiamo dalla teoria che

$$W(K_n) \leq \frac{dimV}{2} = \frac{n^2 - 1}{2}$$

in quanto il prodotto scalare è non degenere. Consideriamo lo spazio $Span(E_{i,j})$ (con $i < j$): notiamo che ogni matrice di questa è forma è isotropa, in quanto $E_{ij} \cdot E_{ij} = 0$ e inoltre ogni matrice è ortogonale a tutte le altre in quanto

$$E_{ij} \cdot E_{hk} = \begin{cases} 0 & j \neq h \\ E_{ik} & j = h \end{cases}$$

quindi il prodotto o è 0 (e quindi la traccia è 0) o è la matrice E_{ik}: ma questa matrice non può essere diagonale in quanto $i < j = h < k$ e quindi ha traccia nulla. Ne consegue che $Span(E_{ij}) \subset CI(K_n)$. Dato che questo spazio ha dimensione $\frac{n(n-1)}{2}$ (sono gli elementi sopra la diagonale) si ha che $W(K_2) \geq \frac{n(n-1)}{2}$ (dato che la restrizione di K_n a quel sottospazio è nulla si ha che o l'indice di Witt è uguale alla dimensione di quel sottospazio o è maggiore). Si ha quindi una doppia disuguaglianza che limita l'indice di Witt di K_n:

$$\frac{n(n-1)}{2} \leq W(K_n) \leq \frac{n^2 - 1}{2}$$

In generale l'indice dipende fortemente dalle caratteristiche del campo $\mathbb{K}$.

26.7 Esercizio 6

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3$ e sia $V = \mathbb{F}_3^3$. Definiamo $\phi \in PS(V)$ con la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

su una qualche base B. Dopo aver mostrato che $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è isotropo determinare l'indice di Witt di ϕ.

Soluzione: Notiamo in primo luogo che ϕ è non degenere. Mostriamo che v è isotropo: banalmente

$$\phi(v, v) = (1\ 1\ 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1\ 1\ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 = 0$$

Consideriamo ora $H = Span(e_1, v)$: questo sottospazio è un piano iperbolico in quanto ha dimensione 2, v è isotropo e

$$M_{\{e_1,v\}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango massimo. Dalla teoria sappiamo che $V = H \oplus^{\perp} H^{\perp}$: $H^{\perp}$ è lo $Span$ di un vettore che è ortogonale sia a v che a e_1, ad esempio possiamo prendere $H^{\perp} = Span(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$. Notiamo ora che $\phi_{|_{H^{\perp}}}$ è non degenere (infatti basta vedere che non è isotropo, avendo dimensione 1):

$$\phi(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = (0\ 1\ -1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (0\ 1\ -1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

Ma allora $V = H \oplus^{\perp} H^{\perp}$ è una decomposizione di Witt di V rispetto a ϕ. Possiamo quindi concludere affermando che $W(\phi) = \#\{\text{piani iperbolici nella decomposizione di Witt}\} = 1$.

26.8 Esercizio 7

Sia $V = \mathbb{R}^4$ spazio reale e sia $\phi \in PS(V)$ definito dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$i)$ Calcolare $\sigma(\phi)$.
$ii)$ determinare il completamento non degenere di $W = Span(e_1, e_2)$ e usare questo per calcolare $\sigma(\phi_{|_W})$ e $W(\phi)$.
$iii)$ determinare le possibili segnature di $\phi_{|_U}$ con U sottospazio di V.

Soluzione: $i)$ Consideriamo $\phi_{|_{Span(e_2,e_4)}}$, la matrice associata è

$$M_{\{Span(e_2,e_4)\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

notiamo che è definito positivo. Di conseguenza $i_+(\phi) \geq 2$. Consideriamo invece il sottospazio $Span(e_3)$: $\phi_{|_{\{Span(e_3)\}}}$ è definito negativo (la matrice associata è il solo numero -2): questo ci dice che $i_-(\phi) \geq 1$. Notiamo inoltre che

$$det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -(-det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = -1 < 0$$

Questo ci dice che ϕ è non degenere e che $i_- \equiv 1(mod 2)$, infatti sappiamo che esiste una base ortonormale in cui la matrice associata a ϕ è diagonale e ha soli 1 e -1 sulla diagonale: dato che il determinante è dato da $(-1)^{i_-(\phi)}$ (prodotto degli elementi sulla diagonale) ed è in questo caso negativo, deve essere $i_-(\phi)$ dispari. Si ha così che la segnatura è per forza $\sigma(\phi) = (3, 1, 0)$.

ii) $W = Span(e_1, e_2) = Span(e_1) \oplus^\perp Span(e_2)$ in quanto la matrice associata a $\phi_{|W}$ è

$$M_{\phi_{|W}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(prime due righe e prime due colonne della matrice). Notiamo che $Span(e_1) \subset CI(\phi)$ (e anche $Span(e_1) \subset Rad(\phi_{|W})$) e che $\phi_{|_{Span(e_2)}}$ è definito positivo. Per costruire un completamente non degenere di W, procediamo come si è visto a teoria: dobbiamo determinare un $w \in W$ non ortogonale a e_1 ma ortogonale a e_2 (rifacendoci alla teoria si avrebbe $Rad(\phi_{|W}) = Span(e_1)$, $U = Span(e_2)$, $Z = Span(e_2)$ e $d_k = w$). Imponiamo le condizioni di ortogonalità: sia $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, si deve avere

$$\phi(w, e_1) = (x\ y\ z\ t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (x\ y\ z\ t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -z \neq 0 \Longrightarrow z \neq 0$$

e

$$\phi(w, e_2) = (x\ y\ z\ t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (x\ y\ z\ t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = y - z = 0 \Longrightarrow y = z$$

Possiamo quindi ad esempio prendere come w il vettore $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il completamente non degenere di W è dunque il sottospazio $\tilde{W} = Z \oplus^\perp H_k = Span(e_2) \oplus^\perp Span(e_1, w)$ (notiamo che abbiamo finito in quanto $Rad(\phi_{|W})$ aveva dimensione 1, altrimenti, se avesse avuto dimensione s, avremmo dovuto iterare il procedimento s volte).
Ora, chi è $\sigma(\phi_{|_{\tilde{W}}})$? Notiamo che $\phi(Span(e_2)) > 0$ e quindi contribuisce con un segno +1, mentre $H_k = Span(e_1, w)$ è un piano iperbolico e quindi, per la teoria, contribuisce con un +1 e un -1: la segnatura è così $\sigma(\phi_{|_{\tilde{W}}}) = (2, 1, 0)$. Notiamo inoltre che da qui otteniamo la stessa segnatura di prima per V, infatti sappiamo che $\sigma(\phi) = \sigma(\phi_{|_{\tilde{W}}}) + \sigma(\phi_{|_{\tilde{W}^\perp}}) = (2, 1, 0) + \sigma(\phi_{|_{\tilde{W}^\perp}})$. Dato che il determinante della matrice che rappresenta ϕ è negativo, come prima, $i_-(\phi)$ deve essere dispari e quindi l'unica cosa che può aumentare per far sì che la somma arrivi a 4 è i_+: $\sigma(\phi_{|_{\tilde{W}^\perp}}) = (1, 0, 0) \Longrightarrow \sigma(\phi) = (2, 1, 0) + (1, 0, 0) = (3, 1, 0)$.
Troviamo ora $W(\phi)$: notiamo che $V = \tilde{W} \oplus^\perp \tilde{W}^\perp$, che possiamo riscrivere come $V = Span(e_2) \oplus^\perp Span(e_1, w) \oplus^\perp \tilde{W}^\perp = (Span(e_2) \oplus^\perp \tilde{W}^\perp) \oplus^\perp Span(w, e_2)$. Notiamo che $\phi_{|_{Span(e_2) \oplus^\perp \tilde{W}^\perp}}$ è definito positivo in quanto $\phi(e_2, e_2) > 0$ e abbiamo appena dimostrato che $\sigma(\phi_{|_{\tilde{W}^\perp}}) = (1, 0, 0)$: quindi, essendo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ definito implica anisotropo e dunque abbiamo trovato una decomposizione di Witt di V, dato che $(Span(e_2) \oplus^\perp \tilde{W}^\perp)$ è la parte anisotropa e $Span(e_1, w)$ è un piano iperbolico: sappiamo che $W(\phi) = \#\{\text{piani iperbolici nella decomposizione}\} + dim Rad(\phi) = 1$.

iii) Sia $U \subset V$. Sappiamo dalla teoria che $i_+(\phi_U) \leq i_+(\phi) = 3$ e che $i_-(\phi_U) \leq i_-(\phi) = 1$.

Assumiamo $dim U = 3$: le possibilità teoriche sono $\sigma(\phi_{|_U}) = (3, 0, 0)$, $\sigma(\phi_{|_U}) = (2, 1, 0)$, $\sigma(\phi_{|_U}) = (2, 0, 1)$, $\sigma(\phi_{|_U}) = (1, 1, 1)$, $\sigma(\phi_{|_U}) = (1, 0, 2)$, $\sigma(\phi_{|_U}) = (0, 1, 2)$ o $\sigma(\phi_{|_U}) = (0, 0, 3)$. Osserviamo subito che l'ultimo caso NON è possibile, si avrebbe altrimenti che $\phi_{|_U} \equiv 0$ e ciò viola il fatto che abbiamo trovato nel punto *ii)* per cui $W(\phi) = 1$.
Anche i casi $\sigma(\phi_{|_U}) = (1, 1, 1)$, $\sigma(\phi_{|_U}) = (1, 0, 2)$, $\sigma(\phi_{|_U}) = (0, 1, 2)$ possono essere esclusi,

infatti prendendo un completamento non degenere di U si avrebbe che nella decomposizione di V verrebbe aggiunto un piano iperbolico e quindi l'indice di negatività aumenterebbe di 1.
Il caso $\sigma(\phi_{|_U}) = (2, 1, 0)$ è quello che abbiamo trovato con il completamento non degenere di W nel punto ii).
Il caso $\sigma(\phi_{|_U}) = (3, 0, 0)$ è il sottospazio ortogonale ai vettori definiti negativi, di cui abbiamo solo e_3 e quindi $U = Span(e_3)^\perp$.
Infine il caso $\sigma(\phi_{|_U}) = (2, 0, 1)$ è possibile considerando $U = \tilde{W}^\perp \oplus^\perp W$.

Assumiamo $dimU = 2$: le possibilità teoriche sono $\sigma(\phi_{|_U}) = (2, 0, 0)$, $\sigma(\phi_{|_U}) = (1, 1, 0)$, $\sigma(\phi_{|_U}) = (1, 0, 1)$, $\sigma(\phi_{|_U}) = (0, 1, 1)$, $\sigma(\phi_{|_U}) = (0, 0, 2)$.
Come prima, gli ultimi due casi sono impossibili in quanto un completamento non degenere di U genererebbe un piano iperbolico che aumenterebbe l'indice di negatività.
Il caso $\sigma(\phi_{|_U}) = (2, 0, 0)$ è banalmente $\tilde{W} \perp \oplus^\perp Span(e_2)$.
Il caso $\sigma(\phi_{|_U}) = (1, 0, 1)$ è proprio W.
Il caso $\sigma(\phi_{|_U}) = (1, 1, 0)$ è il piano iperbolico trovato nel punto ii): $U = Span(e_1, w)$.

Assumiamo $dimU = 1$: le possibilità teoriche sono $\sigma(\phi_{|_U}) = (1, 0, 0)$, $\sigma(\phi_{|_U}) = (0, 1, 0)$, $\sigma(\phi_{|_U}) = (0, 0, 1)$. Tutte e tre le segnature sono possibili: la prima è realizzata da $Span(e_2)$, la seconda da $Span(e_3)$ e la terza da $Span(e_1)$.

26.9 Esercizio 8

Sia $V = \mathbb{R}^3$ spazio reale e sia $\phi \in PS(V)$ definito dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Calcolare $\sigma(\phi)$ e la decomposizione di Witt di V rispetto a ϕ.

Soluzione: Per calcolare la segnatura possiamo utilizzare, come già fatto altre volte, il metodo di Jacobi. Notiamo infatti che

$$det(1) = 1 > 0$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -2 < 0$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -33 < 0$$

Sappiamo quindi che $i_-(\phi) \equiv 1(mod 2)$ in quanto il determinante della matrice che rappresenta ϕ è negativo (ovvero o è 1 o è 3). Dato che c'è almeno una permanenza si può affermare che $\sigma(\phi) = (2, 1, 0)$.

Per quanto riguarda la decomposizione di Witt, sappiamo innanzitutto che $Rad(\phi) = \{0\}$ e quindi una decomposizione di Witt di V è del tipo $V = A \oplus^\perp H$ dove H è un piano iperbolico e A è anisotropo. Basta quindi trovare un piano iperbolico dentro V e abbiamo finito: imponiamo la condizione di isotropia, sia $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ allora

$$\phi(v, v) = (x\ y\ z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x\ y\ z) \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x + 2y - z \\ 3x - y + z \end{pmatrix} =$$

$$= x^2 + 2xy + 3xz + 2xy + 2y^2 - yz + 3xz - yz + z^2 = x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy + 6xz - 2yz = 0$$

Quindi ogni vettore isotropo rispetta l'equazione di sopra. Prendiamo ad esempio $x = 1, y = 0$ e otteniamo $z^2 + 6z + 1 = 0$ che ha soluzioni $z = -3 \pm 2\sqrt{2}$ (ne scegliamo una delle due): si ha quindi che il vettore

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 + 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

è isotropo. Basta ora trovare un vettore non ortogonale a v e abbiamo finito: imponiamo la condizione di "non"-ortogonalità:

$$(1 \;\; 0 \quad -3+2\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1 \;\; 0 \quad -3+2\sqrt{2}) \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 2x+2y-z \\ 3x-y+z \end{pmatrix} =$$

$$= x+2y+3z+(-3+2\sqrt{2})(3x-y+z) = (-8+6\sqrt{2})x+(5-2\sqrt{2})y+2\sqrt{2}z \neq 0$$

Scegliamo ad esempio $x = 1$ e $y = 3$ e otteniamo

$$-8+6\sqrt{2}+15-6\sqrt{2}+2\sqrt{2}z \neq 0 \Longleftrightarrow 7+2\sqrt{2}z \neq 0 \Longleftrightarrow z \neq -\frac{7}{2\sqrt{2}}$$

Si ha quindi che ad esempio il vettore

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \frac{7}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

non è ortogonale a v e che quindi il sottospazio $Span(v, w)$ è un piano iperbolico. Concludiamo quindi con la decomposizione

$$V = Span(v, w) \oplus^{\perp} Span(v, w)^{\perp}$$

27 Esercitazione 16-05-2021

27.1 Nota su endomorfismi e aggiunti

Sia V uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare ϕ non degenere e siano $U, W \subset V$ due sottospazi supplementari, ovvero tali per cui $W \oplus U = V$. Allora esiste una mappa di proiezione $\pi_W : V \longrightarrow V$ che associa a $v = u+w$ il vettore $w \in W$. Consideriamo π^*, ovvero l'aggiunto di π: vogliamo capire chi è. Notiamo che ogni proiezione gode di una proprietà importante: $\pi_W^2 = \pi$, infatti $\pi_W^2(v) = \pi_W(\pi_W(v)) = \pi_W(\pi_W(u + w)) = \pi_W(w) = w$ e dato che π_W è un endomorfismo, il suo polinomio minimo sarà $t^2 - t$ e quindi possiamo scomporre V come somma diretta di autospazi. Consideriamo allora $(\pi_W^*)^2 = (\pi_W^2)^* = \pi_W^*$: anch'esso è un endomorfismo che gode della stessa proprietà di π_W: si ha la decomposizione di Fitting (vedi sezione 16.5) $V = Ker\pi_W^* \oplus Im\pi_W^*$. Ci basta allora determinare $Ker\pi_W^*$ e $Im\pi_W^*$. Sia $x \in Ker(\pi_W^*)$, allora $\pi_W^*(x) = 0$: su ϕ si ha che $\forall v \in V$ $\phi(v, \pi_W^*(x)) = 0 \Longrightarrow \forall v$ $\phi(\pi_W(v), x) = 0 \Longleftrightarrow x \in Im(\pi_W)^\perp = W^\perp$. Quindi il Ker dell'aggiunto è l'immagine della mappa (di cui si sta facendo l'aggiunto) ortogonale.

OSSERVAZIONE: Non abbiamo sfruttato il fatto che l'endomorfismo in questione fosse proprio π_W: la stessa dimostrazione vale anche per un generico endomorfismo g: $Kerg^* = Img^\perp$ e $Kerg^\perp = Img^*$.

27.2 Esercizio 1

Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$ e sia $\phi \in PS(V)$ definito da $\phi(p, q) = a\alpha - (a\beta + \alpha b) + 2b\beta + (c\beta + b\gamma)$ dove $p = ax^2 + bx + c$ e $q = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Sia $f \in End(V)$ definito dalla derivata $f(p) = D(p)$. Determinare l'aggiunto di f rispetto a ϕ, il suo nucleo, la sua immagine e verificare ciò che si è dimostrato nella nota precedente.

Soluzione: Consideriamo la base $B = \{x^2, x, 1\}$ e determiniamo la matrice $M_B(\phi)$: troviamo tutte le entrate facendo i 9 prodotti scalari... ci fidiamo dai!

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Troviamo ora invece la matrice associata a f nella base B: anche in questo caso ci fidiamo e otteniamo che

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per quanto visto a teoria possiamo trovare $M_B^B(f^*)$: sappiamo infatti che

$$M_B^B(f^*) = M_B(\phi)^{-1} M_B^B(f)^\top M_B(\phi)$$

Ci basta quindi trovare $M_B(\phi)^{-1}$: anche qui ci fidiamo di Collari e si ha che

$$M_B(\phi)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Otteniamo che la matrice $M_B^B(f^*)$ non è nient'altro che

$$M_B^B(f^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Notiamo che $rnk(M_B^B(f^*)) = 2$ in quanto ha una riga nulla e le altre due non sono l'una multipla dell'altra. Si ha quindi che $dimKer(M_B^B(f^*)) = 3 - 2 = 1$ e che un generatore del nucleo di f^* è ad esempio il polinomio

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_B = x^2 + 1 \Longleftrightarrow Ker(f^*) = Span(x^2 + 1)$$

Per quanto invece riguarda Imf^* si ha che ogni polinomio appartenente all'immagine è del tipo

$$\left[\begin{pmatrix}-2 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}\right]_B = \left[\begin{pmatrix}-2a+4b+2c\\ 0\\ -2a+5b+2c\end{pmatrix}\right]_B = (-2a+4b+2c)x^2 - 2a+5b+2c$$

Notiamo che dato che Imf^* ha dimensione 2, ci basta trovare due polinomi che si possono scrivere in questa forma linearmente indipendenti. Notiamo però che i due coefficienti non dipendono l'uno dall'altro, ovvero che al variare di a, b e c in $\mathbb{R}$ le due espressioni possono assumere tutti i valori diversi che vogliamo, infatti se fissiamo $h \in \mathbb{R}$ si ha che $-2a+4b+2c = h \implies -2a+5b+2c = -2a+4b+2c+b = h+b$ che, al variare di b, può assumere qualsiasi valore di $\mathbb{R}$. Possiamo quindi concludere affermando che una base di $Im(f^*)$ è $\{x^2, 1\}$ ovvero $Im(f^*) = Span(x^2, 1)$.

Verifichiamo ora che $Kerf = Im(f^*)^\perp$. Notiamo che $Kerf = Span(1)$, infatti solo le costanti vengono mandate a 0 quando derivate. Mostriamo che l'ortogonale all'immagine di f^* è proprio $Kerf$. Ci basta verificare l'ortogonalità sui generatori: imponiamo dunque la condizione di ortogonalità:

$$\begin{cases}\phi(ax^2+bx+c, x^2) = 0\\ \phi(ax^2+bx+c, 1) = 0\end{cases} \iff$$

$$(a\ b\ c)\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = a-b = 0 \qquad (a\ b\ c)\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = b = 0$$

dunque abbiamo effettivamente fatto vedere che 1 è un elemento contemporaneamente ortogonale a x^2 e a 1.

27.3 Esistenza e unicità della radice quadrata di una matrice simmetrica

Sia $A \in S(n, \mathbb{R})$ definita positiva (ovvero $\forall x \in \mathbb{R}^n/\{0\}$ si ha che $x^\top Ax > 0$), allora esiste un'unica matrice $S \in S(n, \mathbb{R})$ tale per cui $S^2 = A$ (si dice che S è la radice quadrata di A). Notare che se $n = 1$, allora $A = (\alpha)$ (che è una copia di $\mathbb{R}$) e dall'essere definita si ha che $\alpha > 0$ (ovvero è una copia di $\mathbb{R}^{>0}$) che, come sappiamo, ammette una radice quadrata.

Dimostrazione. (Esistenza): Dal teorema spettrale reale, esiste $P \in O(n, \mathbb{R})$ tale che $P^\top AP = D$, con D matrice diagonale (sulla diagonale ci sono gli autovalori di A). Tutti gli autovalori di A devono essere positivi, altrimenti il prodotto scalare associato ad A avrebbe segnatura diversa da $(n, 0, 0)$. Quindi D ha la forma

$$D = \begin{pmatrix}\lambda_1 &&&&&&&&\\ & \ddots &&&&&&&\\ && \lambda_1 &&&&&&\\ &&& \lambda_2 &&&&&\\ &&&& \ddots &&&&\\ &&&&& \ddots &&&\\ &&&&&& \lambda_s &&\\ &&&&&&& \ddots &\\ &&&&&&&& \lambda_s\end{pmatrix}$$

dove ci sono $ma(\lambda_i)$ λ_i (con $ma(\lambda_i)$ la molteplicità algebrica dell'autovalore i); inoltre ogni $\lambda_i \geq 0$. Definiamo ora la matrice D' come segue

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \sqrt{\lambda_1} & & & & & & \\ & & & \sqrt{\lambda_2} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \sqrt{\lambda_s} & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \sqrt{\lambda_s} \end{pmatrix}$$

Notiamo che $(D')^2 = D$, infatti il prodotto di due matrici diagonali è una matrice diagonale e ogni entrata è il prodotto delle corrispondenti entrate. Definiamo dunque S come $S = P^\top D' P$ e otteniamo che $S^2 = (P^\top D' P)^2 = P^\top (D')^2 P = P^\top D P = A$, ovvero che S è la radice quadrata della matrice A.

Dimostrazione. (Unicità): Notiamo che per decomposizione primaria, possiamo scrivere $\mathbb{R}^n$ come somma diretta degli autospazi

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} V_\lambda(A)$$

(con $\lambda > 0$). Se restringiamo A a $V_\lambda(A)$, si ha che $A_{|_{V_\lambda(A)}}) = \lambda I_n$. Sia $T \in S(n, \mathbb{R})$ tale che $T^2 = A$ (esiste per quanto detto prima), allora $T^2_{|_{V_\lambda(A)}} = \lambda I_n$: da quest'informazione ricaviamo che $\mu(T_{|_{V_\lambda(A)}}) | x^2 - \lambda$ e in particolare $T_{|_{V_\lambda(A)}}$ è diagonalizzabile. Ricordiamo però che T è definita positiva e quindi tutti i suoi autovalori sono positivi, ovvero il polinomio minimo non può contenere nella sua fattorizzazione radici negative: dato che $x^2 - \lambda = (x - \sqrt{\lambda})(x + \sqrt{\lambda})$ e che $-\sqrt{\lambda} < 0$, l'unico autovalore possibile è $\sqrt{\lambda}$, ovvero $sp(T_{|_{V_\lambda(A)}}) = \{\sqrt{\lambda}\}$ $\implies \mu(T_{|_{V_\lambda(A)}}) = x - \sqrt{\lambda}$ e quindi la matrice $T_{|_{V_\lambda(A)}}$ è della forma $T_{|_{V_\lambda(A)}} = \sqrt{\lambda} I_n$. Notiamo inoltre che $T \cdot A = T \cdot T^2 = T^3 = T^2 \cdot T = A \cdot T$, ovvero A e T commutano, ma allora per quanto visto a teoria gli autospazi di A sono T-invarianti.
Possiamo concludere dicendo che se esistessero due matrici simmetriche T e S tali per cui $T^2 = S^2 = A$, allora $T = S$ in quanto dovrebbero coincidere su tutti gli autospazi in cui si spezza $\mathbb{R}^n$ per decomposizione primaria (abbiamo trovato esplicitamente la forma che assumono queste matrici).

27.4 Decomposizione polare

Sia $A \in GL(n, \mathbb{R})$, allora esiste unica una coppia (P, S), con $P \in O(n, \mathbb{R})$ e $S \in S(n, \mathbb{R})$ definita positiva, tale per cui $A = P \cdot S$ (SLOGAN: Ogni matrice invertibile si spezza come prodotto di una matrice ortogonale e di una matrice simmetrica definita positiva).

Dimostrazione. Ci conviene, in questo tipo di esercizi, partire dalla fine: se effettivamente esistono due matrici come nell'ipotesi tali per cui $A = P \cdot S$, allora S, essendo definita positiva, è anche invertibile (è simile a una matrice diagonale con sulla diagonale solo autovalori positivi, Esercizio 5 dell'Esercitazione del 21/12/2021); ma allora $P = A \cdot S^{-1}$, ovvero P è univocamente determinata da S: notiamo che questo in parte risolve il problema dell'unicità, infatti, una volta dimostrata l'unicità di S, segue immediatamente anche l'unicità di P.
Sappiamo inoltre che P è ortogonale, ovvero è una matrice con la proprietà particolare di avere l'inversa e la trasposta coincidenti. Se allora consideriamo l'espressione $A^\top \cdot A$, vediamo che $A^\top \cdot A = S^\top \cdot P^\top \cdot P \cdot S = S^2$, ovvero S, se esiste, è una sorta di radice quadrata di $A^\top \cdot A$ (cosa che avrebbe senso dire in quanto $A^\top \cdot A$ è simmetrica): ci manca da verificare se $A^\top \cdot A$ è definita positiva:

$$x^\top \cdot A^\top \cdot A \cdot x = (A \cdot x)^\top \cdot (A \cdot x) = ||A \cdot x||^2 \geq 0$$

e in particolare si ha uguaglianza se e solo se $x = 0$; dunque $A^\top \cdot A$ è definita positiva. Possiamo quindi affermare che, se esiste, S è LA radice quadrata di $A^\top \cdot A$.

Ripercorriamo quanto detto finora in maniera deduttiva: consideriamo la matrice $A^\top \cdot A$, notiamo che essa è simmetrica e definita positiva e quindi, per quanto visto nell'esercizio precedente, essa ammette un'unica radice quadrata (che è simmetrica, definita positiva e invertibile), che chiamiamo S. Definiamo ora P come la matrice $P = A \cdot S^{-1}$: se per puro caso P fosse ortogonale avremmo finito. Verifichiamo l'ortogonalità di P:

$$P \cdot P^\top = (A \cdot S^{-1}) \cdot (A \cdot S^{-1})^\top = A \cdot S^{-1} \cdot (S^{-1})^\top \cdot A^\top = A \cdot S^{-1} \cdot (S^\top)^{-1} \cdot A^\top =$$

$$= A \cdot S^{-1} \cdot S^{-1} \cdot A^\top = A \cdot (S^2)^{-1} \cdot A^\top = A \cdot (A^\top \cdot A)^{-1} \cdot A^\top = A \cdot A^{-1} \cdot (A^\top)^{-1} \cdot A^\top = I_n$$

ovvero $P^\top = P^{-1}$, che è la definizione di matrice ortogonale.

27.5 Esercizio 2

Siano $A, B \in S(n, \mathbb{R})$ con A definita positiva (ricordare che a ogni matrice simmetrica è associato un prodotto scalare ϕ, quindi in questo caso abbiamo due prodotti scalari, associati rispettivamente a A e a B, che chiamiamo ϕ_A e ϕ_B). Si dimostrino i seguenti fatti:
i) $A \cdot B$ è diagonalizzabile
ii) $i_+(\phi_B) = \#\{\lambda \in sp(A \cdot B)$ positivi contati con molteplicità$\}$ e che $i_-(\phi_B) = \#\{\lambda \in sp(A \cdot B)$ negativi contati con molteplicità$\}$

ACHTUNG! Il prodotto di due matrici simmetriche non è necessariamente una matrice simmetrica; citando testualmente Collari: "Io vi consiglio di andare, ci son diversi tatuatori qui vicino, e di tatuarvelo qua, perché è una cosa su cui, credetemi, nella vostra vita cadrete infinite volte. A un certo punto della vostra vita voi vedrete il prodotto di due matrici simmetriche e direte *Ah, è simmetrico...* No. Mai. Non è vero. È falso" (La battuta, il grande ridere, la simpatia, l'umorismo, la comicità odierna, la risata, l'ilarità, la burla, la celia, la beffa, la ludrica affermazione, lo spasso, il divertimento, l'arguta ironia, la conia, il dileggio, l'irrisione, la spiritosaggine, lo svago, la corbellatura, il giuoco, l'amenità, lo scherno, la facezia, il frizzo, la piacevolezza, la briosità, il motteggio, la beffardaggine, la sagacia, l'intrattenimento).
Ruzzini a parte, in generale è vero che il prodotto di due matrici simmetriche è simmetrica se e solo se le due matrici commutano.

Dimostrazione. *i)* Dal fatto che A sia simmetrica e definita positiva, segue l'esistenza della radice quadrata: $\exists! S \in S(n, \mathbb{R})$ definita positiva tale per cui $S^2 = A$. Segue quindi che $A \cdot B = S^2 \cdot B$ e quindi $S^{-1} \cdot A \cdot B \cdot S = S \cdot B \cdot S$. Notiamo che $S \cdot B \cdot S$ è simmetrica, infatti $(S \cdot B \cdot S)^\top = S^\top \cdot B^\top \cdot S^\top = S \cdot B \cdot S$ (sono tutte simmetriche): ma allora per il teorema spettrale reale è diagonalizzabile. Notiamo che $A \cdot B$ è allora simile a una matrice diagonalizzabile, ed è quindi anch'essa diagonalizzabile in quanto la diagonalizzabilità è un invariante per similitudine.

ii) Abbiamo osservato che $A \cdot B$ è simile a $S \cdot B \cdot S$ e in particolare, quindi hanno lo stesso spettro. Dato che $S \cdot B \cdot S$ è simmetrica, esisterà un prodotto scalare $\phi \in PS(\mathbb{R}^n)$ nella base canonica $Can = \{e_1, e_2, e_3\}$ tale per cui $M_{Can}(\phi) = S \cdot B \cdot S$, che per semplicità chiamiamo $\phi_{S \cdot B \cdot S}$. Ma allora, dato che $i_+(\phi_{S \cdot B \cdot S})$ è legata agli autovalori della matrice (infatti essendo simmetrica è diagonalizzabile e sulla diagonale compaiono tutti gli autovalori) e gli autovalori di $S \cdot B \cdot S$ sono, per quanto detto poco fa, gli stessi di $A \cdot B$, si ha che $i_+(\phi_{S \cdot B \cdot S}) = \#\{\lambda \in sp(A \cdot B)$ positivi contati con molteplicità$\}$. Notiamo però che anche S è simmetrica, quindi $S \cdot B \cdot S = S^\top \cdot B \cdot S$, ovvero B e $S^\top \cdot B \cdot S$ sono congruenti e in particolare $\phi_{S \cdot B \cdot S}$ e ϕ_B sono isometrici: dato che le isometrie preservano la segnatura, si deve avere che $i_+(\phi_{S \cdot B \cdot S}) = i_+(\phi_B)$.
Possiamo fare un analogo discorso per quanto riguarda l'indice di negatività.

27.6 Esercizio 3

Si mostri che se M è diagonalizzabile, allora $\exists A, B \in S(n, \mathbb{R})$, con A definita positiva, tali per cui $M = A \cdot B$.

27.7 Esercizio 4

Si dimostri che $A \in M(n,\mathbb{C})$ è normale $\iff \exists U \in U(n)$ (gruppo matriciale unitario classico) tale che $U^\top \cdot A \cdot \overline{U} = D$, con D matrice diagonale.

Dimostrazione. Osserviamo subito che $A \in M(n,\mathbb{C})$ e che dunque è unitariamente triangolabile ($\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso e quindi il polinomio caratteristico di A si scompone in fattori lineari: questo ci assicura la triangolabilità... inoltre esisterà una base B la cui bandiera è A-invariante: dato che Gram-Schmidt rispetta le bandiere, possiamo ottenere una base unitaria). Dimostriamo ora le due frecce:

($\Longrightarrow$) Supponiamo A normale, allora per definizione $A \cdot A^* = A^* \cdot A$, dove A^* è l'aggiunta di A. Per quanto detto sopra $\exists U \in U(n,\mathbb{C})$ tale per cui $U^\top \cdot A \cdot \overline{U} = T$, con T triangolare. Valutiamo il prodotto $\overline{T}^\top \cdot T$:

$$\overline{T}^\top \cdot T = \overline{(U^\top \cdot A \cdot \overline{U})}^\top \cdot (U^\top \cdot A \cdot \overline{U}) = U^\top \cdot \overline{A}^\top \cdot \overline{U} \cdot U^\top \cdot A \cdot \overline{U}$$

Ora, si ha che $\overline{U} \cdot U^\top = I_n$, in quanto $U \in U(n,\mathbb{C})$ che per definizione è l'insieme delle matrici che hanno per inversa la loro coniugata trasposta. Quindi

$$\overline{T}^\top \cdot T = U^\top \cdot \overline{A}^\top \cdot A \cdot \overline{U}$$

Ma per quanto visto a teoria $\overline{A}^\top = A^*$ e per ipotesi le due matrici commutano!

$$\overline{T}^\top \cdot T = U^\top \cdot A \cdot \overline{A}^\top \cdot \overline{U} = U^\top \cdot A \cdot \overline{U} \cdot \overline{U}^{-1} \cdot \overline{A}^\top \cdot \overline{U} = U^\top \cdot A \cdot \overline{U} \cdot U^\top \cdot \overline{A}^\top \cdot \overline{U} = T \cdot \overline{T}^\top$$

e dunque anche T è normale (commuta con il suo complesso coniugato). Ma T è triangolare, cioè è della forma

$$T = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & \dots & z_{1n} \\ 0 & z_{22} & \ddots & \ddots & z_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & z_{nn} \end{pmatrix}$$

dunque come è fatta $\overline{T}^\top$? Avrà la forma

$$\overline{T}^\top = \begin{pmatrix} \overline{z_{11}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \overline{z_{12}} & \overline{z_{22}} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \overline{z_{1n}} & \overline{z_{2n}} & \dots & \dots & \overline{z_{nn}} \end{pmatrix}$$

Consideriamo allora il prodotto $T \cdot \overline{T}^\top$: chi è ad esempio $(T \cdot \overline{T}^\top)_{11}$? Notiamo che

$$(T \cdot \overline{T}^\top)_{11} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & \dots & z_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{z_{11}} \\ \overline{z_{12}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \overline{z_{1n}} \end{pmatrix} = z_{11} \cdot \overline{z_{11}} + z_{12} \cdot \overline{z_{12}} + \dots + z_{1n} \cdot \overline{z_{1n}} = \sum_{i=1}^{n} |z_{1i}|^2$$

Per ipotesi questo è uguale a $(\overline{T}^\top \cdot T)_{11}$:

$$(\overline{T}^\top \cdot T)_{11} = \begin{pmatrix} \overline{z_{11}} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_{11} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{z_{11}} \cdot z_{11} = |z_{11}|^2$$

$\Longrightarrow |z_{11}|^2 = \sum_{i=1}^{n} |z_{1i}|^2$ da cui $\sum_{i=2}^{n} |z_{1i}|^2 = 0$ e visto che è somma di quantità positive o nulle, l'unica possibilità è che siano tutti uguali a 0, ovvero $z_{1_i} = 0 \ \forall i = 2, ..., n$. Ragionando analogamente per tutti gli altri elementi della diagonale otteniamo che T è una matrice diagonale, il che dimostra la tesi.

($\Longleftarrow$) Ci basta mostrare che A commuta con la sua aggiunta, ovvero con la sua trasposta coniugata. Dal fatto che $U^\top \cdot A \cdot \overline{U} = D$, otteniamo $A = (U^\top)^{-1} \cdot D \cdot \overline{U}^{-1}$: dato che U è una matrice unitaria $\overline{U}^\top = U^{-1}$ e quindi $\overline{U}^{-1} = U^\top$ e $(U^\top)^{-1} = \overline{U}$ quindi $A = \overline{U} \cdot D \cdot U^\top$. Troviamo allora un'espressione per $\overline{A}^\top$:

$$\overline{A}^\top = \overline{(\overline{U} \cdot D \cdot U^\top)}^\top = (U \cdot \overline{D} \cdot \overline{U}^\top)^\top = \overline{U} \cdot \overline{D}^\top \cdot U^\top = \overline{U} \cdot \overline{D} \cdot U^\top$$

Ci basta allora mostrare che A e $\overline{A}^\top$ commutano:

$$A \cdot \overline{A}^\top = \overline{U} \cdot D \cdot U^\top \cdot \overline{U} \cdot \overline{D} \cdot U^\top = \overline{U} \cdot D \cdot \overline{D} \cdot U^\top = \overline{U} \cdot \overline{D} \cdot D \cdot U^\top = \overline{U} \cdot \overline{D} \cdot U^\top \cdot \overline{U} \cdot D \cdot U^\top = \overline{A}^\top \cdot A$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che due matrici diagonali commutano.

Osservazione: Sia $A \in M(n, \mathbb{R}) \subset M(n, \mathbb{C})$, cioè una matrice a coefficienti reali che consideriamo a coefficienti complessi. Se A è normale, ovvero $A \cdot A^\top = A^\top \cdot A$ (il coniugato possiamo anche non metterlo in quanto i coefficienti sono reali) e triangolabile, allora A è simmetrica e dunque diagonalizzabile.

28 Esercitazione 18-05-2021

28.1 Esercizio 1

Sia $\mathbb{A} = \{p \in \mathbb{R}[x] | p(0) = 3\}$ l'insieme dei polinomi a coefficienti reali che valutati in 0 danno come risultato 3 e sia $V = \mathbb{R}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$. Definiamo un'operazione

$$* : \mathbb{A} \times V \longrightarrow \mathbb{A}, \quad (P, Q) \mapsto P * Q = P + xQ$$

Si mostri che $\mathbb{A}$, dotato dell'operazione $*$ è uno spazio affine su V.

Soluzione: Notiamo innanzitutto che l'operazione $*$ è ben definita, ovvero che l'immagine della coppia (P, Q) sta effettivamente in $\mathbb{A}$:

$$(P + xQ)(0) = P(0) + 0 = P(0) = 3$$

ed effettivamente $P + xQ \in \mathbb{A}\ \forall Q \in V$. Mostriamo ora le due proprietà che caratterizzano gli spazi affini:

"associatività": Sia $P \in \mathbb{A}$ e siano $Q, R \in \mathbb{V}$, allora

$$(P * Q) * R = (P + xQ) * R = P + xQ + xR = P + x(Q + R) = P * (Q + R)$$

esistenza e unicità del vettore congiungente: Siano $P, Q \in \mathbb{A}$ distinti, allora $(P - Q)(0) = P(0) - Q(0) = 3 - 3 = 0$, ovvero 0 è radice del polinomio $P - Q$. Dal momento che $P \neq Q$, $x|(P - Q)$: definiamo allora $\overrightarrow{PQ}$ come $\overrightarrow{PQ} = \frac{Q-P}{x}$: notiamo che è tutto ben definito e che questa quantità è un polinomio. Mostriamo che è il vettore congiungente:

$$P * \overrightarrow{PQ} = P + \cancel{x}\frac{Q - P}{\cancel{x}} = P + Q - P = Q$$

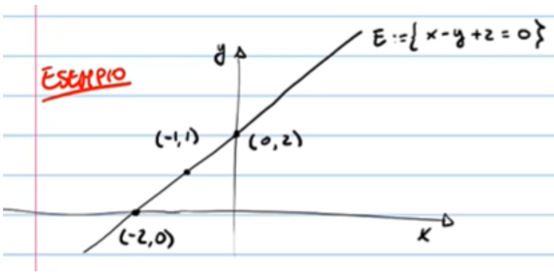
Questo dimostra che $\mathbb{A}$ dotato di $*$ è uno spazio affine su V.

28.2 Esercizio 2

Sia $\mathbb{A} = V = \mathbb{R}^2$ e si consideri l'insieme $E := \{x - y + 2 = 0\}$, munito dell'operazione

$$* : E \times \mathbb{R} \longrightarrow E, \quad ((x, g), t) \mapsto (x + t, g + t)$$

Si mostri che E è un sottospazio affine di $\mathbb{A}$.



Dimostrazione. Mostriamo che è un sottospazio affine facendo vedere che esiste un punto P di $\mathbb{A}$ tale per cui E_P è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{A}_P$. Scegliamo per comodità un punto di quelli appartenenti a E (che sarà la nostra origine per considerare E come sottospazio vettoriale), ad esempio il punto $(0, 2)$, e mostriamo che ogni combinazione lineare di elementi di E centrata in $(0, 2)$ continua a rimanere dentro E (detto altrimenti, E come sottospazio vettoriale è chiuso per combinazioni lineari). Mostriamo empiricamente con un esempio che dati due punti di E (distinti e diversi da $(0, 2)$) allora una loro combinazione lineare con centro in $(0, 2)$ dà un elemento di $E_{(0,2)}$: prendiamo ad esempio i punti $(-2, 0)$ e $(-1, 1)$ (che appartengono a E) e mostriamo che una loro combinazione lineare con centro in $(0, 2)$ è un elemento di E: sia allora

$$\frac{1}{2} \cdot_{(0,2)} (-2, 0) +_{(0,2)} \frac{1}{2} \cdot_{(0,2)} (-1, 1)$$

una combinazione lineare di elementi di $E_{(0,2)}$.
Per come è definito il prodotto affine per scalari, dobbiamo determinare in primo luogo il vettore congiungente $(0,2)$ e $(-2,0)$ e il vettore congiungente $(0,2)$ e $(-1,1)$:

$$\overrightarrow{(0,2)(-2,0)} = -2$$

in quanto, per come è stata definita l'operazione su E, $\overrightarrow{(0,2)(-2,0)}$ è il numero che dobbiamo aggiungere a entrambe le coordinate di $(0,2)$ per ottenere il punto $(-2,0)$ (e ovviamente $(0-2, 2-2) = (-2,0)$). Analogamente si ha che

$$\overrightarrow{(0,2)(-1,1)} = -1$$

Si ha così che

$$\frac{1}{2} \cdot_{(0,2)} (-2,0) = (0,2) * \frac{1}{2}\overrightarrow{(0,2)(-2,0)} = (0,2) * \frac{1}{2}(-2) = (0,2) * (-1) = (0-1, 2-1) = (-1,1)$$

$$\frac{1}{2} \cdot_{(0,2)} (-1,1) = (0,2) * \frac{1}{2}\overrightarrow{(0,2)(-1,1)} = (0,2) * \frac{1}{2}(-1) = (0,2) * (-\frac{1}{2}) = (0-\frac{1}{2}, 2-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$$

Per trovare la somma basta ricordare che per definizione

$$P_1 +_{(0,2)} P_2 = P_1 * \overrightarrow{(0,2)P_2}$$

e quindi basta trovare $\overrightarrow{(0,2)(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})}$:

$$\overrightarrow{(0,2)(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})} = -\frac{1}{2}$$

e quindi

$$(-1,1) +_{(0,2)} (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = (-1,1) * (-\frac{1}{2}) = (-1-\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2}) = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$$

e notiamo che questo punto appartiene a E in quanto

$$-\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 2 = -2 + 2 = 0$$

Abbiamo quindi mostrato empiricamente che esiste una combinazione lineare di elementi di $E_{(0,2)}$ che appartiene a $E_{(0,2)}$.

Mostriamo ora a livello generale che questa cosa è vera: Notiamo innanzitutto che $0_{(0,2)} = (0,2) \in E$ per scelta nostra. Dobbiamo far vedere che dati due punti qualsiasi di E la loro somma vettoriale centrata in $(0,2)$ è un elemento di E e che il loro prodotto centrato in $(0,2)$ per uno scalare continua ad essere in E. Si considerino i punti $Q_1 = (x_1, x_1+2)$ e $Q_2 = (x_2, x_2+2)$ e siano $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Valutiamo

$$\lambda_i \cdot_{(0,2)} Q_i = (0,2) * \lambda_i \overrightarrow{(0,2)(x_i, x_i+2)} = (0,2) * (\lambda_i x_i) = (\lambda_i x_i, \lambda_i x_i + 2)$$

quindi $\lambda_1 \cdot_{(0,2)} Q_1 = (\lambda_1 x_1, \lambda_1 x_1 + 2)$ e $\lambda_2 \cdot_{(0,2)} Q_2 = (\lambda_2 x_2, \lambda_2 x_2 + 2)$. La loro somma è per definizione $\lambda_1 \cdot_{(0,2)} Q_1 +_{(0,2)} \lambda_2 \cdot_{(0,2)} Q_2 = (\lambda_1 x_1, \lambda_1 x_1 + 2) * \overrightarrow{(0,2)(\lambda_2 x_2, \lambda_2 x_2 + 2)}$ e dato che

$$\overrightarrow{(0,2)(\lambda_2 x_2, \lambda_2 x_2 + 2)} = \lambda_2 x_2$$

si ha

$$\lambda_1 \cdot_{(0,2)} Q_1 +_{(0,2)} \lambda_2 \cdot_{(0,2)} Q_2 = (\lambda_1 x_1, \lambda_1 x_1 + 2) * \lambda_2 x_2 = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + 2) \in E$$

28.3 Esercizio 3

Sia $\mathbb{A} = \{p \in \mathbb{R}[x] | p(0) = 3\}$ l'insieme dei polinomi a coefficienti reali che valutati in 0 danno come risultato 3 e sia $V = \mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale di 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$. Definiamo un'operazione

$$+ : \mathbb{A} \times V \longrightarrow \mathbb{A}, \quad (P,Q) \mapsto P + Q = P + xQ$$

Consideriamo $E \subset \mathbb{A}$ definito da $E = \{p \in \mathbb{A} | \frac{d}{dx}p(0) = 2\} = \{ax^3 + bx^2 + cx + 3, a, b, c \in \mathbb{R} | c = 2\} = \{ax^3 + bx^2 + 2x + 3 | a, b \in \mathbb{R}\}$. Mostrare che E è un sottospazio affine.

Dimostrazione. Mostreremo che E è un sottospazio affine in diversi modi: partiamo dimostrando che E è il traslato di un sottospazio di V. Notiamo che $E = \{ax^3+bx^2+2x+3 | a, b \in \mathbb{R}\}$: gli unici parametri liberi sono i coefficienti di grado 2 e 3, potremmo dunque ipotizzare che un sottospazio di V che traslato ci dà E è il sottospazio $W = Span(x^2, x)$: infatti $P * W = P + xSpan(x^2, x) = P + Span(x^3, x^2)$. Dobbiamo allora verificare se un tale $P \in E$ esiste o meno. Consideriamo allora un generico polinomio di E: esso ha la forma $P = ax^3 + bx^2 + 2x + 3$. Chi è $S_P^{-1}(E)$? Per definizione

$$S_P^{-1}(E) = \{\overrightarrow{PQ} | Q \in E\}$$

Fissato $Q = \alpha x^3 + \beta x^2 + 2x + 3$, come è fatto il vettore $\overrightarrow{PQ}$? Per quanto visto nell'esercizio 1 di questa esercitazione $\overrightarrow{PQ} = \frac{Q-P}{x} = (\alpha - a)x^2 + (\beta - b)x \in Span(x^2, x)$. Quindi effettivamente $E = P + W$.
Nota bene: in questo caso ci siamo complicati la vita, perché abbiamo voluto far vedere che per ogni elemento P di E si ha che $P + W = E$; in realtà basta mostrare che ne esiste almeno uno! Quindi ci sarebbe bastato mostrare che $E = 2x + 3 + Span(x^2, x)$.

Secondo metodo) Mostriamo che esiste $P \in E$ tale per cui $E \subset \mathbb{A}_P$ è un sottospazio vettoriale. Consideriamo il più semplice $P \in E$: $P = 2x+3$. Facciamo vedere che E è chiuso per combinazioni lineari e che contiene lo 0:

$0_P = P \in E$ (lo abbiamo scelto proprio lì).

Siano $Q_1, Q_2 \in E$ (diciamo $Q_1 = a_1x^3 + a_2x^2 + 2x + 3$ e $Q_2 = a_2x^3 + b_2x^2 + 2x + 3$) e siano $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$: mostriamo la chiusura per combinazioni lineari. Consideriamo

$$\lambda_1 \cdot_P Q_1 +_P \lambda_2 \cdot_P Q_2$$

studiamo ogni singolo pezzo:

$$\lambda_1 \cdot_P Q_1 = 2x+3+\lambda_1 \overrightarrow{PQ_1} = 2x+3+\lambda_1 \cancel{x} \frac{Q_1 - 2x - 3}{\cancel{x}} = 2x+3+\lambda_1(a_1x^3+b_1x^2) = \lambda_1 a_1 x^3+\lambda_1 b_1 x^2+2x+3$$

$$\lambda_2 \cdot_P Q_2 = 2x+3+\lambda_2 \overrightarrow{PQ_2} = 2x+3+\lambda_2 \cancel{x} \frac{Q_2 - 2x - 3}{\cancel{x}} = 2x+3+\lambda_2(a_2x^3+b_2x^2) = \lambda_2 a_2 x^3+\lambda_2 b_2 x^2+2x+3$$

La somma risulta essere quindi

$$\lambda_1 \cdot_P Q_1 +_P \lambda_2 \cdot_P Q_2 = \lambda_1 a_1 x^3 + \lambda_1 b_1 x^2 + 2x + 3 + \lambda_2 a_2 x^3 + \lambda_2 b_2 x^2 + 2x + 3 - 2x - 3 =$$
$$= (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)x^3 + (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2)x^2 + 2x + 3 \in E$$

e questo dimostra che come sottoinsieme di $\mathbb{A}_P$ è un sottospazio vettoriale (e quindi affine su $\mathbb{A}$).

28.4 Esercizio 4

Siano $E, F \in \mathbb{A}$ due sottospazi affini. Definiamo l'insieme $PM(E, F) = \{\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q | Q \in F, P \in E\}$ (notare che l'espressione che definisce l'insieme è una combinazione affine e quindi è ben definita non dipendendo da nessun riferimento). Mostrare che $PM(E, F)$ è un sottospazio affine.

Dimostrazione. Mostriamo che è chiuso per combinazioni affini: si considerino k punti di $PM(E, F)$: $M_1, M_2, ..., M_k$, dove ogni punto è definito come $M_i = \frac{1}{2}P_i + \frac{1}{2}Q_i$. Scegliamo k scalari $\lambda_1, ..., \lambda_k$ tali per cui $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ e consideriamo la combinazione affine

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i M_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i (\frac{1}{2}P_i + \frac{1}{2}Q_i) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2}\lambda_i P_i + \frac{1}{2}\lambda_i Q_i = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^k \lambda_i P_i) + \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^k \lambda_i Q_i)$$

Notiamo che $\sum_{i=1}^k \lambda_i Q_i \in F$ in quanto è una combinazione affine di punti di F ed equivalentemente $\sum_{i=1}^k \lambda_i P_i \in E$ in quanto è una combinazione affine di punti di E. Ma allora, per definizione di $PM(E, F)$, $\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^k \lambda_i P_i) + \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^k \lambda_i Q_i) \in PM(E, F)$.

28.5 Proiezione su un sottospazio affine rispetto a un sottospazio vettoriale

Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su V con l'operazione $+ : \mathbb{A} \times V \longrightarrow \mathbb{A}$. Si considerino due sottospazi vettoriali $U, W \subset V$ supplementari di V ($V = U \oplus W$) e sia E un sottospazio affine di $\mathbb{A}$ con giacitura W. Consideriamo $\pi_U^E : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ che associa $\mathbb{A} \ni P \mapsto \pi_U^E(P) \in (P+U) \cap E$, detta proiezione su E rispetto a U. Mostriamo che π_U^E è ben definita, ovvero che $(P+U) \cap E \in \mathbb{A}$ contiene un solo punto.
Per quanto visto a teoria $Giac((P + U) + E) \supset Giac(P + U) + Giac(E)$. Per definizione $Giac(P + U) = U$ e $Giac(E) = W$, quindi $Giac(P + U) + Giac(E) = V \implies Giac((P + U) + E) = V \implies Giac((P + U) + E) = Giac(P + U) + Giac(E)$. Ma allora, per quanto visto a teoria, $(P + U) \cap E \neq \emptyset$. Vogliamo mostrare che questo punto è unico: siano allora $P_1, P_2 \in (P + U) \cap E$: per definizione $P_1 = P_2 + \overrightarrow{P_2P_1}$; dato che E è un sottospazio affine e $P_2 \in E$, allora $\overrightarrow{P_2P_1} \in Giac(E) = W$, ma anche $P + U$ è un sottospazio affine e $P_2 \in P+U$ e dunque $\overrightarrow{P_2P_1} \in Giac(P+U) = U$, ovvero $\overrightarrow{P_2P_1} \in U \cap W = \{0\}$, ovvero $\overrightarrow{P_2P_1} = 0$, ovvero $P_1 = P_2$, il che mostra l'unicità.

Facciamo ora vedere che π_U^E è una trasformazione affine, ovvero mostriamo che π_U^E conserva le combinazioni affini: siano $P_0, P_1, ..., P_k \in \mathbb{A}$ e siano $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ con $\sum_{i=1}^k \lambda_k = 1$. Dimostriamo che $\pi_U^E(\sum_{i=1}^k \lambda_i P_i) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \pi_U^E(P_i)$. Definiamo $Q_0 = \pi_U^E(P_0) \in E \cap (P_0+U)$ e quindi $\exists i_0 \in U$ tale per cui $Q_0 = P_0 + u_0$. Fissiamo ora $P \in \mathbb{A}$: il vettore $\overrightarrow{P_0P}$ si decompone in maniera unica come $\overrightarrow{P_0P} = u + w$ (con $u \in U$ e $w \in W$), in quanto V è somma diretta di U e W. Chi è $\pi_U(P)$? Notiamo che $Q_0 + w \in E$ ($w \in Giac(E)$ e $Q_0 \in E$), che possiamo riscrivere come $Q_0 + w = Q_0 + u_0 - u_0 + w = P_0 + u_0 + w = P_0 + u + w + u_0 - u = P_0 + \overrightarrow{P_0P} + (u_0 - u) = P + (u_0 - u)$ con $u_0 - u \in U$: ma allora $Q_0 + w \in P + U$ e quindi $Q_0 + w = \pi_U^E(P)$ (è l'unico punto di intersezione tra E e $P + U$).
Per definizione di somma rispetto a P_0 si ha che $\sum_{i=1}^k \lambda_i P_i = P_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i}$: ogni $\overrightarrow{P_0P_i}$ lo possiamo scrivere come somma tra un $u_i \in U$ e un $w_i \in W$ e quindi per quanto detto sopra $\pi_U^E(\sum_{i=1}^k \lambda_i P_i) = Q_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i w_i$, dove $w_i = \overrightarrow{Q_0\pi_U^E(P_i)}$ e quindi $Q_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i w_i = Q_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i Q_0 \pi_U^E(P_i) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \pi_U(P_i)$, che dimostra che è una combinazione affine.
Mostriamo lo stesso risultato in un modo alternativo: facciamo vedere che $\pi_U^E : \mathbb{A}_{P_0} \longrightarrow \mathbb{A}_{\pi_U^E(P_0)}$ è lineare.

Additività: Siano $Q_1, Q_2 \in \mathbb{A}_{P_0}$: per definizione $Q_1 +_{P_0} Q_2 = P_0 + \overrightarrow{P_0Q_1} + \overrightarrow{P_0Q_2}$. Siano $u_1, u_2 \in U$ e $w_1, w_2 \in W$ tali per cui $\overrightarrow{P_0Q_1} = u_1 + w_1$ e $\overrightarrow{P_0Q_2} = u_2 + w_2 \implies Q_1 +_{P_0} Q_2 = P_0 + (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2)$ e quindi $\pi_U^E(Q_1 +_{P_0} Q_2) = Q_0 + w_1 + w_2 = Q_0 + \overrightarrow{Q_0\pi_U^E(Q_1)} + \overrightarrow{Q_0\pi_U(Q_2)} = \pi_U^E(Q_1) +_{\pi_U^E(P_0)} \pi_U^E(Q_2)$.

Omogeneità: Sia $\lambda \in \mathbb{K}$ e sia $Q \in \mathbb{A}_{P_0}$: per definizione $\lambda \cdot_{P_0} Q = P_0 + \lambda\overrightarrow{P_0Q}$: siano ora $u \in U$ e $w \in W$ tali per cui $\overrightarrow{P_0Q} = u + w$, allora $P_0 + \lambda\overrightarrow{P_0Q} = P_0 + \lambda u + \lambda w$ e $\pi_U^E(\lambda \cdot_{P_0} Q) = Q_0 + \lambda w = Q_0 + \lambda\overrightarrow{Q_0\pi_U^E(Q)} = \lambda \cdot_{\pi_U^E(Q_0)} \pi_U^E(Q)$.

28.6 Affinità e poligoni

Sia $\mathbb{A} = V = \mathbb{R}^2$ sul campo dei reali. Sia $f \in Aff(\mathbb{A})$, allora
· f manda rette affini in rette affini
· f manda semirette in semirette con punto iniziale in punto iniziale
· f manda segmenti in segmenti (ovvero manda l'intersezione di due semirette nell'intersezione di due semirette)
· f manda poligoni in poligoni, mandando interno in interno e preservando l'ordine ciclico dei vertici
· Tre punti A, B, C sono allineati se e solo se $\exists\lambda \in \mathbb{R}$ tale per cui $C = \lambda B + (1 - \lambda)A$. λ è detto rapporto semplice tra A, B e C; da questo $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB} \implies \overrightarrow{f(A)f(C)} = \lambda\overrightarrow{f(A)f(B)} \iff f(C) = \lambda f(B) + (1 - \lambda)f(A)$, ovvero f preserva i rapporti semplici.

Fissiamo T e T' due triangoli, ovvero due poligoni i cui vertici sono terne di punti non allineati: allora esiste sempre un'affinità che manda T in T'. Infatti, 3 punti P, Q, S non allineati (che sono SEMPRE affinemente indipendenti, in quanto i vettori relativi $\overrightarrow{PS}$ e $\overrightarrow{PQ}$

sono linearmente indipendenti) in uno spazio affine di $\mathbb{R}^2$ formano un riferimento affine per il piano e un'affinità è completamente determinata da dove mandiamo un riferimento affine. Basta dunque mandare il riferimento affine di T nel riferimento affine di T' e ottenere che $f(T) = T'$. Ma quante bigezioni possibili ci sono tra $\{P, Q, S\}$ e $\{P', Q', S'\}$? Ce ne sono $3! = 6$ e quindi esistono esattamente 6 affinità da T a T'.

Se invece consideriamo due parallelogrammi, definiti dai quattro punti $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ e $\{P'_1, P'_2, P'_3, P'_4\}$, dobbiamo ricordare che le affinità rispettano i parallelismi: se quindi mandiamo, P_1 in P'_1, P_2 in P'_2 e P_3 in P'_3, allora necessariamente un'affinità manda P_4 in P'_4. Esiste quindi sempre un'affinità che manda un parallelogramma in un parallelogramma: in particolare ne esistono 8 (basta scegliere i 3 vertici).

Se invece M e M' sono due trapezi, ovvero due poligoni che hanno due lati paralleli e quattro vertici, esiste un'affinità che manda M in M'? La risposta è no. Supponiamo che esista un'affinità che manda i tre vertici $\{P_1, P_2, P_3\}$ nei tre vertici $\{P'_1, P'_2, P'_3\}$. Prendiamo ora i due lati obliqui del primo e facciamoli incontrare in un punto Q: P_1, P_2 e Q sono un riferimento affine di $\mathbb{A}$. Consideriamo l'affinità di prima che manda P_1 in P'_1 e P_2 in P'_2: dove manda Q? Dato che Q sta nella parte esterna di M, anche $f(Q) = Q'$ sta nella parte esterna di M'. Osserviamo che mandando rette in rette, l'immagine di P_4 appartiene alla retta tra P'_1 e Q' e nello stesso modo l'immagine di P_3 appartiene alla retta tra P'_2 e Q': ma dato che le affinità preservano i rapporto semplici, la distanza QP_2 e la distanza QP_3 stanno in un certo rapporto che, teoricamente è uguale al rapporto tra $Q'P'_3$ e $Q'P'_2$ e la distanza QP_4 e la distanza QP_1 stanno in un certo rapporto che, teoricamente è uguale al rapporto tra $Q'P'_4$ e $Q'P'_1$.